Theorem 3. *Let $g \in L^1(\mathbb{R}_+) \cup L^\infty(\mathbb{R}_+), f \in H_0^m(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^m$ with $m > \dfrac{3d+3}{2}$, and $\|g\|_1 < k\lambda_1$, where λ_1 is the first eigenvalue of the Dirichlet Laplacian on Ω. Then the boundary value problem*

$$\begin{cases} D_{0+}^\alpha u(x,t) = k\Delta u(x,t) - \int_0^t g(t-\tau)u(x,\tau)d\tau, & (x,t) \in Q = \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ I_{0+}^{1-\alpha} u(x,0) = f(x), & x \in \Omega, \quad \frac{1}{2} < \alpha \le 1, \end{cases} \tag{5}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \ge 1)$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega \in C^{[\frac{d}{2}]+1}$, has a unique classical solution in $C^2(\overline{\Omega}) \times BSA_1^\alpha(\mathbb{R}_+)$.

By $f(t) \in BSA_1^\alpha(\mathbb{R}_+)$ we mean both $f(t), D_{0+}^\alpha f(t) \in BSA_1(\mathbb{R}_+)$. Similar results are also obtained for the Caputo fractional derivative. This is a joint work with Dinh Thanh Duc and Tran Dinh Phung.

BLOW-UP PROBLEM FOR NONLOCAL NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL NONLINEAR BOUNDARY CONDITION

A. L. Gladkov (Minsk, Belarus), T. V. Kavitova (Vitebsk, Belarus)

We consider nonlinear nonlocal parabolic equation

$$u_t = \Delta u + a(x,t)u^r \int_\Omega u^p(y,t)\,dy - b(x,t)u^q,\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{1}$$

with nonlinear nonlocal boundary condition

$$u(x,t) = \int_\Omega k(x,y,t)u^l(y,t)\,dy,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \tag{2}$$

and initial data

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega, \tag{3}$$

where r, p, q, l are positive constants, Ω is a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ for $n \ge 1$ with smooth boundary $\partial\Omega$. We suppose that $a(x,t),\ b(x,t),\ k(x,y,t)$ and $u_0(x)$ satisfy the following conditions:

$$a(x,t),\ b(x,t) \in C_{loc}^\alpha(\overline{\Omega} \times [0,\infty)),\ 0 < \alpha < 1,\ a(x,t) \ge 0,\ b(x,t) \ge 0;$$

$$k(x,y,t) \in C(\partial\Omega \times \overline{\Omega} \times [0,\infty)),\ k(x,y,t) \ge 0;$$

$$u_0(x) \in C(\overline{\Omega}),\ u_0(x) \ge 0,\ x \in \overline{\Omega},\ u_0(x) = \int_\Omega k(x,y,0)u_0^l(y)\,dy,\ x \in \partial\Omega.$$

We prove some global existence and blow-up results for (1) – (3). Criteria on this problem which determine whether the solutions blow up in finite time for large or for all nontrivial initial data are also given. Our global existence and blow-up results depend on the behavior of $a(x,t),\ b(x,t)$ and $k(x,y,t)$ as $t \to \infty$. The initial boundary value problem (1) – (3) with $a(x,t) \equiv 0$ has been considered in [1,2].

References

1. *Gladkov A., Guedda M.* Blow-up problem for semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Nonlinear Anal.* **74** (13) (2011), 4573–4580.

2. *Gladkov A., Guedda M.* Semilinear heat equation with absorption and a nonlocal boundary condition. *Appl. Anal.* **91** (12) (2012), 2267–2276.

О МНОЖЕСТВЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

М. Н. Гончарова (Гродно, Беларусь)

Рассмотрим управляемый объект, поведение которого описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = u, \tag{1}$$

где $x = x(t)$ — координата, описывающая положение объекта в зависимости от времени t, параметр ω удовлетворяет неравенству $\omega > 0$, на управление наложено ограничение $u \in [-\epsilon_1; \epsilon_2]$, $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ и в каждый момент времени производная $\dot{x}$ функции x удовлетворяет фазовому ограничению

$$\dot{x} \leq d, d > 0. \tag{2}$$

Построим множество управлемости $Y(\tau)$ этого объекта в начало координат, то есть множество всех точек фазового пространства, удовлетворяющих фазовому ограничению (2), из которых можно перейти на отрезке времени $[0; \tau]$ в начало координат при всевозможных допустимых управлениях. Будем рассматривать такие моменты времени τ, для которых выполняется неравенство $\tau\omega \leq \dfrac{\pi}{2}$.

С помощью замены $x = y_1, \dot{x} = \omega y_2$ уравнение (1) сведем к нормальной системе дифференциальных уравнений $\dot{y}_1 = \omega y_2, \dot{y}_2 = -\omega y_1 + v$, в которой вектор управления $(o; v)$ будет принимать значения из отрезка

$$V = \{(v_1; v_2) \in R^2 | v_1 = 0, -\frac{\epsilon_1}{\omega} \leq v_2 \leq \frac{\epsilon_2}{\omega}\} = \{(v_1; v_2) \in R^2 | v_1 = 0, -l_1 \leq v_2 \leq l_2\}.$$

Примем, что справедливо неравенство $d\omega < l_1$. В противном случае фазовое ограничение не оказывает влияния на решение задачи и искомое множество управляемости будет совпадать с множеством управляемости для задачи без ограничения (2). Обозначим через τ_1 момент времени, при котором множество управляемости, построенное без учета фазового ограничения, впервые достигает прямую $y_2 = d$.

Теорема. В плоскости переменных y_1, y_2 множество $Y(\tau)$ для тех моментов времени, для которых выпоняются неравенства $\tau_1\omega < \tau\omega \leq \frac{\pi}{2}\omega$ ограничено следующими линиями: окружностью радиуса $\dfrac{l_1 + l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{l_1}{\omega} cos\tau\omega; \dfrac{l_1}{\omega} sin\tau\omega\right)$; окружностью радиуса $\dfrac{p + l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(\dfrac{l_2}{\omega} + \dfrac{p - l_1}{\omega} cos(\tau - \tau_1)\omega + \dfrac{l_1}{\omega} cos\tau\omega; \dfrac{p - l_1}{\omega} sin(\tau - \tau_1)\omega + \dfrac{l_1}{\omega} sin\tau\omega\right)$, где $p = \dfrac{d\omega}{sin\tau\omega}$; прямой $y_2 = d$; окружностью радиуса $\dfrac{l_1 + l_2}{\omega}$ с центром в точке $\left(-\frac{l_1}{\omega} - \frac{l_2}{\omega} cos\tau\omega; -\dfrac{l_2}{\omega} sin(\tau - \tau_1)\omega\right)$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, задание 1.2.04.4.

DIFFERENTIAL HYBRID MODELS OF ECONOMIC GROWTH

C. Gospodarik (Minsk, Belarus)

In [1, 2], discrete (finite-difference) hybrid models of economic growth are constructed and applied for long-term forecasting. The idea of hybrid forecasting models goes back to the cyberneticists Shannon and Neumann, synthesis of “reliable circuits from unreliable elements” and consists in the aggregation of classical models of economic growth based on production and econometric models.

The aggregated differential models for the discrete hybrid modelling are described in [1] and have the following form:

$$\frac{(dGDP(t))/dt}{GDP(t)} = \alpha \frac{(dK(t))/dt}{K(t)} + \beta \frac{(dL(t))/dt}{L(t)} + \gamma \frac{(dH(t))/dt}{H(t)} + \varphi \frac{(dTFP(t))/dt}{TFP(t)}, \tag{1}$$

where at time t magnitude $GDP(t)$ is the gross domestic product, $K(t)$ is the fixed capital, $L(t)$ is the labor, $H(t)$ is the quality of human capital, and $TFP(t)$ is the total factor productivity.

To calculate the capital is used also a hybrid model:

$$\frac{(dK(t))/dt}{K(t)} = Inv(t-1) \frac{GDP(t-1)}{2K(t-1)} + Inv(t) \frac{GDP(t)}{2K(t)} - \delta_{HYBRID}, \tag{2}$$