

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДФРАКТАЛЬНОЙ $K^{(\gamma)}$ -РАЗМЕРНОСТИ ТИПА «ПРЕДКАНТОРОВСКОЙ ПЫЛИ»

Ю. Н. Булатов (Елец, Россия), В. А. Калитвин (Липецк, Россия),
Е. Л. Санина (Воронеж, Россия)

Понятие фрактала, предфрактала и фрактальной “пыли” введено Б. Мандельбротом (подробности и философия этих определений содержит книга [1]). Одно из определений фрактала как структуры, состоящей “из частей, которые в каком-то смысле подобны целому”, является не только наиболее кратким, но и наиболее общим, поскольку позволяет иметь разные размерности “самоподобных” частей. Использование формулы размерности Хаусдорфа–Безиковича приводит к размерностям предфракталов, совпадающей с размерностью фрактальной “пыли”. Л.Н. Ляхов предложил применить другую формулу для вычисления размерности предфракталов (в том числе кластеров), построенную на основе *определенного дробного интеграла Римана–Лиувилля* с мерой интегрирования со слабой особенностью (см. в [2] определение оператора Киприянова–Бельтрами). Общий вид этой формулы в евклидовом пространстве точек $\mathbb{R}_n$ с неотрицательной функцией (плотности) f следующий:

$$2^n |S_1^+(n)|_\gamma \int_0^a f(t) t^{n+|\gamma|-1} dt = \Lambda(f, a), \quad 2^n |S_1^+(n)|_\gamma = 2\pi^{(n-1)/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+\gamma}{2}\right)},$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, $n + |\gamma|$ — искомая дробная K_γ -размерность шара $|x| = t < a$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$, в котором каждая координата x_i имеет фрактальную размерность равную $1 + \gamma_i$, $-1 < \gamma_i < 0$. Здесь правая часть уравнения имеет эмпирическое происхождение. Для численного решения приведенного уравнения относительно размерности $n + |\gamma|$ были разработаны программы на языках python и matlab. Результаты вычислений по этим формулам привели к новому результату: *размерность предфрактального множества монотонно стремиться к размерности соответствующего фрактала, оставаясь больше этой размерности*. В докладе будут приведены графики размерностей самоподобных фракталов в $\mathbb{R}_1$ (“канторовская пыль” отрезка на каждом этапе дробления), в $\mathbb{R}_2$ (размерность “предковра” Серпинского) и в $\mathbb{R}_3$ (размерность куба со сферическими полостями внутри). В этих графиках указаны прямые, отвечающие топологическим и евклидовым размерностям, соответствующих фракталов, и поточечные кривые их предфрактальных размерностей.

Литература

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований. – 2002. – 656 с.
2. Ляхов Л.Н., Санина Е.Л. Оператор Киприянова–Бельтрами с отрицательной размерностью оператора Бесселя и сингулярная задача Дирихле для В-гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. - Т. 56. - №12 (2020), 1610–1620.

COMPARISON OF MORREY SPACES AND NIKOL'SKII SPACES

V. I. Burenkov, T. V. Tararykova (Moscow, Russia)

For a Lebesgue measurable set $G \subset \mathbb{R}^n$ and $0 < p \leq \infty$, below $L_p(G)$ is the standard Lebesgue space.

The Morrey spaces M_p^λ , named after C.B. Morrey, were introduced by him in 1938 in [2] and defined as follows. For $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 < p \leq \infty$, $f \in M_p^\lambda$ if $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|f\|_{M_p^\lambda} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty,$$

where $B(x, r)$ is the open ball in $\mathbb{R}^n$ centered at the point $x \in \mathbb{R}^n$ of radius $r > 0$. Here the notation is slightly altered compared with the original definition in [2], namely we write $r^{-\lambda}$ rather than $r^{-\frac{n-\lambda}{p}}$ for the reasons which will be clarified below and explicitly stated in the remark at the end of the abstract.

If $\lambda = 0$, then clearly $M_p^0 = L_p$. If $\lambda = \frac{n}{p}$, then $M_p^{\frac{n}{p}} = L_\infty$. If $\lambda > \frac{n}{p}$ or $\lambda < 0$, then $M_p^\lambda = \Theta$, where Θ is the set of all functions equivalent to 0 on $\mathbb{R}^n$. So the admissible range of the parameters is $0 < p \leq \infty$ and $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$.

The Nikol'skii spaces H_p^λ of all functions possessing common smoothness of order λ measured in the L_p metric, named after S.M. Nikol'skii, were introduced by him in [3] and defined as follows: for $\lambda \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq \infty, f \in H_p^\lambda$ if $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ and

$$\|f\|_{H_p^\lambda} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{\dot{H}_p^\lambda} < \infty,$$

where

$$\|f\|_{\dot{H}_p^\lambda} = \sup_{h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0} |h|^{-\lambda} \|\Delta_h^\sigma f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

and $\Delta_h^\sigma f$ is the difference of f of order $\sigma \in \mathbb{N}$ with step h and $\sigma > \lambda$. (For different $\sigma > \lambda$ the definitions are equivalent.)

Note that the space M_p^λ is not contained in $L_p(\mathbb{R}^n)$, while clearly the space H_p^λ is contained in $L_p(\mathbb{R}^n)$. For this reason in order to compare the spaces M_p^λ and H_p^λ it is natural to consider the following variant of the Morrey spaces

$$\widehat{M}_p^\lambda = M_p^\lambda \cap L_p$$

with the quasi-norm (norm if $1 \leq p \leq \infty$)

$$\|f\|_{\widehat{M}_p^\lambda} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{M_p^\lambda}.$$

The space M_p^λ is not monotonic with respect to the parameter λ . In contrast, the space $\widehat{M}_p^\lambda$, similarly to the space H_p^λ , is monotonic with respect to λ : if $0 \leq \lambda < \mu \leq \frac{n}{p}$, then $\widehat{M}_p^\mu \subset \widehat{M}_p^\lambda$.

Let us denote by $(H_p^\lambda)^\downarrow$ and $(\widehat{M}_p^\lambda)^\downarrow$ the subspaces of H_p^λ , $\widehat{M}_p^\lambda$ respectively, consisting of all functions $f \in H_p^\lambda$, $\widehat{M}_p^\lambda$ respectively, of the form $f(x) = g(|x|)$, where g is a non-negative non-increasing function on $[0, \infty)$.

Theorem. *Let $n = 1, 1 \leq p < \infty, 0 < \lambda < \frac{1}{p}$. Then*

$$H_p^\lambda \subset \widehat{M}_p^\lambda,$$

for any $0 < \varepsilon < \frac{1}{p} - \lambda$

$$H_p^\lambda \not\subset \widehat{M}_p^{\lambda+\varepsilon},$$

for any $0 < \mu \leq \lambda$

$$\widehat{M}_p^\lambda \not\subset (H_p^\mu)^{loc},$$

and

$$(\widehat{M}_p^\lambda)^\downarrow = (H_p^\lambda)^\downarrow$$

Remark. *By this statement it follows that the Morrey space M_p^λ is not a space of functions possessing any kind of common smoothness of order μ measured in L_p -metrics for any $0 < \mu \leq \lambda$, but the expressions $\|f\|_{L_p(B(x,r))}$ behave like the ones for functions f possessing certain smoothness of order λ measured in L_p -metrics.*

Moreover, for functions of the form $f(x) = g(|x|)$, where g is a non-negative non-increasing function, λ plays a role of the smoothness parameter. This is the reason why the initial notation for the space Morrey space was altered.

It appears that, in many situations in real analysis and especially in applications to the theory of partial differential equations, of primary importance is the behaviour of the expressions $\|f\|_{L_p(B(x,r))}$ rather than smoothness properties of f . In such cases the usage of the Morrey spaces is natural and effective.

References

1. Burenkov V.I., Guliyev V.S., Tararykova T.V. *Comparison of Morrey spaces and Nikol'skii spaces*, Eurasian Mathematical Journal, 12 (2021), no. 1, 9–20.
2. Morrey C.B. *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126–166.
3. Nikol'skii S.M. *Inequalities for entire functions of exponential type and applications to the theory of differentiable functions of several variables*. Proc. Steklov Math. Inst. 38 (1951), 244–278.

ГИБРИДНЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ СТОИМОСТИ БИЗНЕСА

Е. И. Васенкова, А. В. Пыж (Минск, Беларусь)

В настоящее время в международной практике оценка стоимости реализуется посредством традиционных подходов: затратного, рыночного и доходного [1]. Следует отметить, что при оценке стоимости объектов бизнеса достаточно эффективно применение гибридных экономико-математических методов, которые существенно упрощают процедуру расчетов и сохраняют объективность оценки стоимости компании [2]. В частности, в экономических исследованиях и расчетах достаточно широко используется методы эконометрического моделирования.

В качестве объекта оценки выбрана американская транснациональная компания Mondelez International. 99,74% акций компании находятся в свободном обращении на фондовом рынке. Компания является мировым лидером в категориях шоколадных изделий, печенья, жевательной резинки, леденцов. Mondelez International является членом индексов Standard and Poor's 500, NASDAQ.

Для построения эконометрической модели (1) в рамках затратного подхода оценки стоимости бизнеса были выбраны показатели: стоимость акционерного капитала (результатирующий показатель), гудвилл, основные средства и долгосрочные инвестиции, чистая прибыль.

$$d(equity) = 0.77 \cdot d(goodwill) + 0.59 \cdot d(long - term - assets) + \\ + 0.76 \cdot d(net - income) - 463.56 \cdot seas(4) - 647.21. \quad (1)$$

Для построения эконометрической модели (2) в рамках рыночного подхода были проанализированы полугодовые данные по стоимости акций и стоимости имущества объектов пищевой промышленности за период с 2009 по 2020 г. Из полученной информации были выделены объекты, имеющие наиболее сопоставимую сферу деятельности и рыночную стоимость в 2020 г.: Nestle, General Mills, Unilever. В качестве результирующего показателя был выбран мультипликатор “капитализация/балансовая стоимость акционерного капитала”:

$$P/BVE(mdlz) = 0,09 + 0.08 \cdot P/BVE(general - mills) + \\ + 0.22 \cdot P/BVE(nestle) - 0.14 \cdot P/BVE(unilever). \quad (2)$$

Рыночную стоимость компании Mondelez International, Inc ($EV_1(mdlz)$) можно получить, используя соотношение:

$$EV_1(mdlz) = P/BVE(mdlz) \cdot BVE(mdlz). \quad (3)$$

Для построения эконометрической модели (4) в рамках затратного подхода оценки стоимости бизнеса были выбраны показатели: среднегодовая рыночная стоимость акции (результатирующий показатель), чистая прибыль на акцию (eps), балансовая стоимость на акцию (bvps), операционный денежный поток на акцию (cfps), свободный денежный поток на акцию (fcfps)

$$d(stock_price) = 0.60 \cdot d(eps(t - 1)) + 0.71 \cdot d(bvps) - 3.33 \cdot d(cfps) \quad (4)$$