

рядка (дробную модель Максвелла и дробную модель Фойгхта), для соответствия экспериментальным данным релаксации и экспериментальным данным ползучести [3]. В исследовании [4] разработана модель Гука–Работнова–Кельвина вязкоупругости для костной ткани, учитывающая анизотропию, неоднородность и перестройку костной ткани. Уравнения соответствуют монотропной (monotropic) реологической модели костной ткани [5]. Для расчета упругих и вязкоупругих параметров материала разработан алгоритм, в котором используются результаты испытаний на ползучесть, сжатие и сдвиг. Настоящая работа развивает это направление исследований и посвящена оценке напряженно-деформированного состояния бедренной кости при сложном сопротивлении, соответствующем действию собственного веса человека при рутинной деятельности человека. Выполнен сравнительный анализ распределений напряжений в поперечном сечении бедренной кости для различных вариантов описания постоянных упругости, представленных в работах [1, 2, 4].

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта Ф20Р–083 БРФФИ – РФФИ.

Литература

1. Liu J.G., Xu M.Yu. Higher-order fractional constitutive equations of viscoelastic materials involving three different parameters and their relaxation and creep functions. *Mech. Time-Depended Mat.* **10** (2006), 263–279. DOI 10.1007/s11043-007-9022-9.
2. Liu J.G., Xu M. Yu. Study on the viscoelasticity of cancellous bone based on higher-order fractional Models. *2008 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering*. (2008), 1733–1736. doi: 10.1109/ICBBE.2008.761.
3. Wang Y.f., Zhang Z.J., Hei F.Z., Ma H.S. Experimental study on the viscoelastic properties of cancellous bone of the os calcaneus, os lunatum and os capitalum. *J. Biomed. Eng.* **20** (2003), 434–438.
4. Pawlikowski M., Klasztorny M., Skalski K. Studies on constitutive equation that models bone tissue. *Act. Bioeng. Biomech.* **10** (2008), 39–47.
5. Klasztorny M., Gieleta R. The HWKK rheological model for resins. *J. Theor. Appl. Mech.* **40** (2002) 939–960.

МОДЕЛИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ ТКАНЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С. М. Босяков (Минск, Беларусь), М. В. Шитикова (Воронеж, Россия)

Математические модели с использованием производных дробного порядка в последние три десятилетия нашли широкое применение во многих областях науки и техники, в том числе при решении различных задач механики, где требуется описание вязкоупругих свойств материалов и конструкций [1–3]. Основные математические идеи приложения дробного исчисления при моделировании биологических систем изложены в обзорной работе [4], а в [5] приведены примеры использования таких моделей для решения задач биомеханики.

В данном докладе представлены результаты работы по разработке нового класса математических дробно-дифференциальных моделей функционирования вязкоупругих биологических тканей и биомеханических систем в нормальном и патологическом состояниях. Поскольку физико-механические характеристики вязкоупругих мягких и костных тканей, включая коэффициент Пуассона, параметры Ламе и объемный модуль, с течением времени изменяются от своих нерелаксированных значений до релаксированных величин, то для описания процессов релаксации и ползучести используются зависящие от времени операторы дробного порядка с ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Ю.Н. Работнова. Для обобщения вязкоупругих моделей, соответствующих различным режимам функционирования биологических тканей, использован параметр дробности, являющийся величиной, описывающей изменения структуры рассматриваемого объекта при возникновении патологий и/или при возрастных изменениях. Этот параметр позволяет учесть различное поведение биоматериалов при кратковременных и долговременных нагрузках различной интенсивности.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и БРФИ в рамках научного проекта №20–51–00008–Ф20Р–083.

Литература

1. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Fractional Calculus Models in Dynamic Problems of Viscoelasticity. *Handbook of Fractional Calculus with Applications* (Editors D. Baleanu, A.M. Lopes) De Gruyter, Vol. 7, Part A (2019), 139–158.
2. Шитикова М.В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела. *Известия РАН. Механика твердого тела*. No. 5 (2021).
3. Failla G., Zingales M. Advanced Materials Modelling via Fractional Calculus: Challenges and Perspectives. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. Vol. 378 (2020), PaperID 20200050.
4. Magin R.L. Fractional Calculus in Bioengineering. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*. Vol. 32 (2004), 1–378.
5. Bosiakov S. Fractional Calculus in Biomechanics. *Encyclopedia of Continuum Mechanics* (Editors H. Altenbach, A. Ochsner) Springer. Vol. 2 (2020), 946–953.

ОБОБЩЁННЫЕ СВЁРТКИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ОПЕРАТОРЫ СДВИГА Л. Е. Бритвина (Великий Новгород, Россия)

В докладе будут представлены обобщённые свёртки для интегральных преобразований, в частности, для преобразования Ханкеля. Последнее определяется следующим образом

$$h_\nu(f)(s) = \hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t) j_\nu(st) t^{2\nu+1} dt, \quad \nu > -1/2, \quad (1)$$

где функция $j_\nu(st)$ связана с функцией Бесселя первого рода порядка ν равенством

$$j_\nu(st) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{(st)^\nu} J_\nu(st)$$

и является решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\nu + 1}{t} \frac{dy}{dt} + s^2 y = 0 \quad (2)$$

при начальных условиях $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$.

Построенные обобщённые свёртки позволяют получить операторы, схожие с операторами обобщённого сдвига, изученными в работах Б.М. Левитана и его последователей.

Исследованы основные свойства полученных свёрточных операторов и операторов сдвига. Особый акцент сделан на исследовании свёрток с весовыми функциями.

Литература

1. Левитан Б.М. Применение операторов обобщённого сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. *УМН*. Т. 4, вып. 1(29) (1949), 3–112.
2. Житомирский Я.И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя. *Матем. сб.* Т. 36(78), № 2 (1955), 299–310.
3. Куприянов И.А. *Сингулярные эллиптические краевые задачи*. М.: Наука (1997).
4. Britvina L. Generalized shift operators generated by convolutions of integral transforms. In *Current trends in analysis and its applications. Proceedings of the 9th ISAAC Congress, Krakow 2013*. Vladimir Mityushev, Michael V. Ruzhansky (Eds.) Series: Trends in Mathematics — Research Perspectives. Birkhauser (2015), 507–514.
5. Britvina L.E., Ignatenko V.V. The generalization of shift operator related Bessel differential operator. *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series* 1352 (2019) 012007.