

with the Cauchy conditions

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0. \quad (2)$$

The solution to (1)–(2) is

$$u(x, t) = \frac{2^\gamma \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(f(x) * \frac{2}{x^{\gamma+1} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)} \mathbf{H}_{3,2}^{1,2} \left[\frac{4t^{2\alpha}}{x^2} \middle| \begin{matrix} \left(\frac{1-\gamma}{2}, 1\right), \left(-\frac{\gamma}{2}, \alpha\right), (0, 1) \\ (0, \alpha), (-\gamma, 2\alpha) \end{matrix} \right] \right)_\gamma,$$

where

$$(f * g)_\gamma(x) = \int_0^\infty g(y) {}^\gamma T_x^y f(x) y^\gamma dy$$

is the generalized convolution,

$${}^\gamma T_x^y f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}\right) \sin^{\gamma-1} \varphi d\varphi, \quad \gamma > 0$$

is the generalized translation.

References

1. Shishkina E.L., Sitnik S.M. *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*, Amsterdam: Elsevier (2020).

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ПОДМОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ Ю. В. Юлмухаметова (Уфа, Россия)

Рассматривается система уравнений газовой динамики (УГД) в цилиндрической системе координат (t, x, r, θ) с произвольным уравнением состояния. Как известно, подалгебра 2.10 из оптимальной системы 11-мерной алгебры Ли, допускаемой УГД с произвольным уравнением состояния [1], имеет базис, состоящий из оператора галилеева переноса $X_4 = t\partial_x + \partial_U$ и оператора движения по спиральным линиям $\alpha X_1 + X_7 = \alpha\partial_x + \partial_\theta$, где α – постоянная. Инварианты этих операторов задают представление решения:

$$U = \frac{x - \alpha\theta}{t} + u(t, r), \quad V = V(t, r), \quad W = W(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad S = S(t, r). \quad (1)$$

Ставится задача найти решения уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния с предположением о линейной зависимости радиальной компоненты скорости в (1) от пространственной координаты.

Для уравнения состояния политропного газа найдены все четыре решения в зависимости от показателя адиабаты. Для каждого случая записаны мировые линии движения частиц газа. По значению якобиана определены моменты времени коллапса частиц газа. В результате полученные решения описывают прямолинейный разлет частиц газа с поверхности геликоид, движения частиц по логарифмическим спиральям, лежащим на параболоиде, и движения по гиперболическим спиральям, лежащим на конусе.

Для уравнения состояния общего вида проведен анализ полученной системы уравнений в частных производных. Выделено два случая. В первом случае вид уравнения состояния найден в явном виде. Во-втором случае получено дифференциальное уравнение для определения вида уравнений состояния. В качестве примера рассмотрено три частных случая движения частиц газа. Записаны формулы для мировых линий движения частиц газа в цилиндрической системе координат. Построены траектории движения частиц для каждого случая. Полученные

решения описывают движение частиц газа по спиралевидным траекториям, находящимся на поверхности цилиндра, сферы и поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги параболы Нейля.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 18–29–10071_мк) и при частичной поддержке средств государственного бюджета по госзаданию на 2019–2022 годы (№0246–2019–0052).

Литература

1. *Мамонтов Е.В.* Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики. *ПМТФ*. Т.40, No. 2 (1999), 50–55.
2. *Овсянников Л.В.* *Лекции по основам газовой динамики* — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.