Литература

1. *Комяк И.И.* Нелинейная краевая задача типа Римана с положительными показателями *Изв. АН БССР.* Сер. физ.-мат. наук. No. 6 (1970), 83–87.

2. *Rogosin S.V., Chakhmianok T.A.* On solvability of inhomogeneous nonlinear power-type boundary value problem. *Complex Variables and Elliptic Equations.* Vol. 52, No. 10-11 (2007), 933–943.

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОГО СЛАБО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

С. М. Шешко (Минск, Беларусь)

В настоящей работе предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения с логарифмическим ядром вида [1, с. 58, 59]

$$\varphi(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)ln|t-x|dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi(t)K(x,t)dt=f(x),\ -1<x<1,$$

в классе функций $h(-1,1)$ по Мусхелишвили методом ортогональных многочленов. Здесь $K(x,t)$ и $f(x)$ — известные функции из класса Гельдера H, $\varphi(x)$ — искомая функция. Класс функций $h(-1,1)$ — класс ограниченных в окрестности точек $x=\pm 1$ функций [2, с. 31].

Построенные согласно методике [3, 4] спектральные схемы численного решения данного уравнения, получены на основе известных спектральных соотношений для слабо сингулярного интеграла и выведенных квазиспектральных соотношений для слабо сингулярных интегралов, позволяющих получить точные аналитические выражения для интегралов, не прибегая, в отличие от методики [1], к квадратурным формулам.

Как показывают численные расчеты, предложенный алгоритм при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивает высокую точность приближенного решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю Расолько Г.А. за постановку задачи и полезные замечания.

Литература

1. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* Киев: Наук. думка (1984).

2. *Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука (1968).

3. *Расолько Г.А., Шешко С. М., Шешко М. А.* Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений. *Журнал Дифференциальные уравнения.* Том 55, No. 9 (2019), 1285–1292.

4. *Расолько Г.А., Шешко С. М.* Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов. *Журнал Белорусского государственного университета.* Математика. Информатика. No. 2 (2020), 10–20.

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ, СВЯЗАННОЕ С ЗАДАЧЕЙ ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

А. П. Шилин (Минск, Беларусь)

На действительной оси зададим функции $p(t)$, $f(t)$. Будем искать функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\mathrm{Re}(\varphi'(t)\overline{p(t)}-\varphi(t)\overline{p'(t)})+\frac{\varphi(t)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,p(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-\frac{\varphi'(t)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,p(\tau)d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{p(t)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2}-\frac{p'(t)}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=f(t),\ -\infty<t<\infty. \qquad (1)$$

Все указанные в уравнении (1) функции комплекснозначны, удовлетворяют вместе с их производными условию Гельдера и исчезают на бесконечности. Интегралы с $\tau-t$ понимаются в смысле главного значения по Коши, а с $(\tau-t)^2$ — в смысле конечной части по Адамару. Обозначим

$$P_+(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}p(\tau)d\tau}{\tau-z},\ \operatorname{Im}z>0;\ P_R(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}p(\tau)d\tau}{\tau-t}-\operatorname{Re}p(t),\ -\infty<t<\infty.$$

Теорема. *Уравнение (1) сводится к последовательному решению краевой задачи Гильберта для верхней полуплоскости*

$$\Psi_+(t)-\Psi_R(t)=f(t),-\infty<t<\infty,$$

и двух дифференциальных уравнений

$$\Phi_+(z)P'_+(z)-\Phi'_+(z)P_+(z)=\Psi_+(z),\ \operatorname{Im}z>0,$$

$$\Phi_R(t)P'_R(t)-\Phi'_R(t)P_R(t)=\Psi_R(t),\ -\infty<t<\infty.$$

В случае их разрешимости решение уравнения (1) дается формулой $\varphi(t)=\Phi_+(t)-\Phi_R(t)$.

В формулировке теоремы мы имеем в виду ту версию задачи Гильберта для полуплоскости, которая изложена в [1]. Близкое к (1) уравнение на замкнутой кривой на комплексной плоскости решено в [2]. В докладе будет приведена развернутая формулировка теоремы с указанием в явном виде условий разрешимости и более подробной формулы решения уравнения.

Литература

1. *Шилин А.П.* Краевая задача Гильберта для полуплоскости. / Белорусский гос. ун-т. – Минск, 1984. – 18 с. – Деп. в БелНИИНТИ, № 839 Бе-D84.

2. *Шилин А.П.* О решении одного интегро-дифференциального уравнения с сингулярным и гиперсингулярным интегралами. // *Вес. Нац. акад. навук Беларусі.Сер. фіз.-мат. навук* – Т. 56, No 3 (2020), 298–309.

GENERAL FRACTIONAL EULER–POISSON–DARBOUX EQUATION

E. L. Shishkina (Voronezh, Russia)

Let $\alpha>0$, $\gamma>0$. Bessel left-side fractional integral on the half-axis $B^{-\alpha}_{\gamma,0+}$ for $f\in L[0,\infty)$ is defined by formula

$$(B^{-\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=(IB^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2\alpha)}\int\limits_0^x\left(\frac{y}{x}\right)^{\gamma}\left(\frac{x^2-y^2}{2x}\right)^{2\alpha-1}{}_2F_1\left(\alpha+\frac{\gamma-1}{2},\alpha;2\alpha;1-\frac{y^2}{x^2}\right)f(y)dy.$$

Let $n=[\alpha]+1$, $f\in L[0,\infty)$, $IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-}f, IB^{n-\alpha}_{\gamma,b-}f\in C^{2n}(0,\infty)$. We define the left-sided fractional Bessel derivative on the semiaxis of the Gerasimov-Caputo type by the equality [1]

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+}f)(x)=(IB^{n-\alpha}_{\gamma,0+}B^n_\gamma f)(x).$$

We consider the equation for $u=u(x,t)$, $t\geq0$, $x\geq0$

$$(\mathcal{B}^{\alpha}_{\gamma,0+})_t u(x,t)=\frac{1}{x^\gamma}\frac{\partial}{\partial x}x^\gamma\frac{\partial}{\partial x}u(x,t),\qquad \frac{\gamma}{\gamma+1}<\alpha\leq1,\qquad 1<\gamma<2, \qquad (1)$$