

*В.Т. ЕРОФЕЕНКО, С.В. МАЛЫЙ*

## **ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ПЛОСКОМ СЛОЕ ИЗ БИИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА**

The rigorous technique for solving the problem of diffraction of plane electromagnetic wave on a flat bi-isotropic slab is described. It is based on the solution of the boundary problem for Maxwell's equations of special type with special boundary conditions. The examples of the use of the technique for analyzing the interaction of a plane electromagnetic wave with bi-isotropic slabs are presented.

Физика и техника метаматериалов является одним из наиболее интенсивно развивающихся направлений прикладной электродинамики и оптики [1–4], что обусловлено двумя факторами: уникальными электромагнитными свойствами метаматериалов и возможностью их практического изго-

товления. В общем случае биизотропные материалы представляют собой гетерогенные системы, состоящие из диэлектрической матрицы и системы статистически однородно распределенных и ориентированных частиц. Электромагнитные свойства биизотропных материалов характеризуются скалярными материальными параметрами: диэлектрической и магнитной проницаемостями, коэффициентом киральности и параметром невязимности Теллегена.

Примерами использования биизотропных материалов в различных областях оптики и микроволновой техники являются: радиопоглощающие покрытия, электромагнитные экраны, радиопрозрачные стенки антенных обтекателей и укрытий, частотно-селективные и пространственно-поляризационные фильтры, оптические зеркала, элементы антенно-фидерных и оптико-электронных систем. Это делает актуальным разработку эффективных математических моделей взаимодействия электромагнитного излучения с объектами и системами, в состав которых входят биизотропные материалы. Особую роль играет взаимодействие плоской электромагнитной волны с плоским слоем из однородного биизотропного материала, что объясняется следующими причинами: тонкие оболочки и экраны широко применяются на практике; строгое решение задачи может использоваться в качестве тестовой информации для верификации других приближенных методов; вычислительная модель может входить в состав методик определения эффективных электромагнитных параметров биизотропных сред.

В данной работе описывается строгая методика решения задачи дифракции плоской электромагнитной волны на плоском слое из биизотропного материала. В ее основе лежит решение краевой задачи для системы уравнений Максвелла специального вида со специальными граничными условиями [5–7]. Используются нелокальные граничные условия [5], которые аналитически исключают интегрирование уравнений Максвелла в слое. Граничные условия [5] применимы для слоев из биизотропных материалов с произвольными комплексными электромагнитными параметрами.

Нами приводятся результаты использования методики для исследования взаимодействия плоской электромагнитной волны с плоским экраном для различных коэффициентов киральности и параметров невязимности Теллегена.

#### Постановка краевой задачи экранирования с классическими граничными условиями

В пространстве, заполненном вакуумом с электрической и магнитной постоянными  $\epsilon_0, \mu_0$ , рассмотрим плоский слой  $D$  ( $0 < z < \Delta$ ,  $-\infty < x, y < \infty$ ), ограниченный плоскостями  $\Gamma_1(z=0)$  и  $\Gamma_2(z=\Delta)$ . Материал экрана характеризуется электрической  $\mathbf{D}$  и магнитной  $\mathbf{B}$  индукциями

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} + (\chi + i\kappa) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mu_r \mu_0 \mathbf{H} + (\chi - i\kappa) \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

где  $\epsilon_r, \mu_r$  – относительные диэлектрическая и магнитная комплекснозначные проницаемости,  $\chi$  – параметр Теллегена,  $\kappa$  – параметр киральности. Из полупространства  $D_1(z < 0)$  на экран  $D$  падает первичное плоское монохроматическое поле с временной зависимостью  $\exp(-i\omega t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_0 &= A\mathbf{U}^{(-1)} + B\mathbf{U}^{(-2)}, \\ \mathbf{H}_0 &= \frac{1}{iZ_0} (A\mathbf{U}^{(-2)} + B\mathbf{U}^{(-1)}), \quad z < 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $A, B$  – заданные комплексные амплитуды,  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ Ом}$  – волновое сопротивление,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(\mp 1)} &= i(\sin \varphi_0 \mathbf{e}_x - \cos \varphi_0 \mathbf{e}_y) \exp(ik_0(\bar{\alpha}_1 x + \bar{\alpha}_2 y \pm \alpha z)), \\ \mathbf{U}^{(\mp 2)} &= (\mp \cos \theta_0 (\cos \varphi_0 \mathbf{e}_x + \sin \varphi_0 \mathbf{e}_y) + \sin \theta_0 \mathbf{e}_z) \exp(ik_0(\bar{\alpha}_1 x + \bar{\alpha}_2 y \pm \alpha z)), \\ \bar{\alpha}_1 &= \cos \varphi_0 \sin \theta_0, \quad \bar{\alpha}_2 = \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \quad \alpha = \cos \theta_0, \\ 0 \leq \theta_0 &< \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \end{aligned} \tag{2}$$

$\omega = 2\pi f$  – круговая частота,  $f > 0$ .

При  $B=0$  первичное поле является плоскополяризованным  $TE$ -полем, при  $A=0$  – плоскополяризованным  $TH$ -полем.

В результате взаимодействия первичного поля с экраном в полупространстве  $D_2(z > \Delta)$  образуется поле  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ , а в слое  $D$  – поле  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ .

Обозначим:  $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1$  – отраженное поле в  $D_1$ ;  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_1$ ,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'_1$  – суммарное поле в  $D_1$ .

Сформируем краевую задачу взаимодействия первичного поля с экраном  $D$ .

*Трехобластная краевая задача.* Требуется при заданном плоском поле (1) определить плоские поля  $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1; \mathbf{E}, \mathbf{H}; \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  соответственно в областях  $D_1, D, D_2$ , которые удовлетворяют: уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}'_1 = i\omega\mu_0\mathbf{H}'_1, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}'_1 = -i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}'_1, \quad z < 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_2 = i\omega\mu_0\mathbf{H}_2, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_2 = -i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}_2, \quad z > \Delta, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}, \quad 0 < z < \Delta, \quad (5)$$

граничным условиям непрерывности тангенциальных составляющих поля на плоскостях раздела сред

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_{1\tau} - \mathbf{E}_\tau)|_{z=0} &= 0, & (\mathbf{H}_{1\tau} - \mathbf{H}_\tau)|_{z=0} &= 0, \\ (\mathbf{E}_\tau - \mathbf{E}_{2\tau})|_{z=\Delta} &= 0, & (\mathbf{H}_\tau - \mathbf{H}_{2\tau})|_{z=\Delta} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

и условиям распространения волн на бесконечность при  $z \rightarrow \pm\infty$ .

Здесь  $\mathbf{E}_{j\tau} = E_{jx}\mathbf{e}_x + E_{jy}\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{H}_{j\tau} = H_{jx}\mathbf{e}_x + H_{jy}\mathbf{e}_y$ .

### Постановка краевой задачи со специальными граничными условиями на экране

При решении краевой задачи экранирования (3) – (6) в первую очередь представляет интерес определение полей в областях  $D_1$  и  $D_2$ , т. е. прошедшее через экран и отраженное от экрана  $D$  поля. В связи с этим задачу (3) – (6) сформулируем в виде эквивалентной краевой задачи со специальными двухсторонними граничными условиями, связывающими поля по обе стороны экрана  $D$  [5, 7].

*Двухобластная краевая задача.* Требуется при заданном плоском поле (1) определить плоские поля  $\mathbf{E}'_1, \mathbf{H}'_1; \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$  в областях  $D_1$  и  $D_2$ , которые удовлетворяют уравнениям (3), (4), граничным условиям [5]:

$$\begin{aligned} E_{2x}|_{z=\Delta} &= (B_{11}E_{1x} + B_{12}E_{1y} + B_{13}H_{1x} + B_{14}H_{1y})|_{z=0}, \\ E_{2y}|_{z=\Delta} &= (B_{21}E_{1x} + B_{22}E_{1y} + B_{23}H_{1x} + B_{24}H_{1y})|_{z=0}, \\ H_{2x}|_{z=\Delta} &= (B_{31}E_{1x} + B_{32}E_{1y} + B_{33}H_{1x} + B_{34}H_{1y})|_{z=0}, \\ H_{2y}|_{z=\Delta} &= (B_{41}E_{1x} + B_{42}E_{1y} + B_{43}H_{1x} + B_{44}H_{1y})|_{z=0} \end{aligned} \quad (7)$$

и условиям распространения волн на бесконечность при  $z \rightarrow \pm\infty$ .

Элементы матрицы  $\hat{B} = \{B_{ij}\}$  граничных условий (7) определяются формулами

$$\begin{aligned} B_{11} &= p[p_2(\Phi_1 S_1 - C_1) - p_1(\Phi_2 S_2 - C_2)], \\ B_{12} &= p[p_1\theta_2 S_2 - p_2\theta_1 S_1], \quad B_{13} = p[\Phi_2 S_2 - \Phi_1 S_1 + C_1 - C_2], \\ B_{14} &= p[\theta_1 S_1 - \theta_2 S_2], \quad B_{21} = p[p_2\delta_1 S_1 - p_1\delta_2 S_2], \\ B_{22} &= p[p_1(\Phi_2 S_2 + C_2) - p_2(\Phi_1 S_1 + C_1)], \\ B_{23} &= p[\delta_2 S_2 - \delta_1 S_1], \quad B_{24} = p[\Phi_1 S_1 - \Phi_2 S_2 + C_1 - C_2], \\ B_{31} &= -p_1 p_2 B_{13}, \quad B_{32} = -p_1 p_2 B_{14}, \\ B_{33} &= p[p_1(C_1 - \Phi_1 S_1) + p_2(\Phi_2 S_2 - C_2)], \\ B_{34} &= p[p_1\theta_1 S_1 - p_2\theta_2 S_2], \quad B_{41} = -p_1 p_2 B_{23}, \quad B_{42} = -p_1 p_2 B_{24}, \\ B_{43} &= p[p_2\delta_2 S_2 - p_1\delta_1 S_1], \\ B_{44} &= p[p_1(\Phi_1 S_1 + C_1) - p_2(\Phi_2 S_2 + C_2)], \\ p_j &= \frac{1}{\mu_r Z_0} (i(\frac{g}{g_j} + \kappa) - \chi), \quad j = 1, 2, \\ g &= \varepsilon_r \mu_r - \chi^2 - \kappa^2, \quad p = \frac{1}{p_1 - p_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_j &= \kappa + f_j, \quad f_j = (-1)^j f_0, \quad f_0 = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r - \chi^2}, \quad 0 \leq \arg f_0 < \pi, \\
 k_j &= \sqrt{(\kappa - f_j)^2}, \quad 0 \leq \arg k_j < \pi, \\
 v_j &= \sqrt{\sin^2 \theta_0 - k_j^2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arg v_j < \frac{\pi}{2}, \\
 S_j &= sh(k_0 \Delta v_j), \quad C_j = ch(k_0 \Delta v_j), \quad \Phi_j = \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 g_j}{g v_j}, \\
 \theta_j &= \frac{g_j}{g v_j} (\bar{\alpha}_1^2 - k_j^2), \quad \delta_j = \frac{g_j}{g v_j} (\bar{\alpha}_2^2 - k_j^2).
 \end{aligned}$$

**Решение краевой задачи**

Решение краевой задачи (3), (4), (7) в областях  $D_j$  представим в виде линейной комбинации базисных плоских  $E$ - и  $H$ -поляризованных полей (2), которые удовлетворяют уравнениям (3), (4):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}'_1 &= x_1 \mathbf{U}^{(+1)} + x_2 \mathbf{U}^{(+2)}, \quad \mathbf{H}'_1 = \frac{1}{iZ_0} (x_1 \mathbf{U}^{(+2)} + x_2 \mathbf{U}^{(+1)}), \quad z < 0, \\
 \mathbf{E}_2 &= x_3 \mathbf{U}^{(-1)} + x_4 \mathbf{U}^{(-2)}, \quad \mathbf{H}_2 = \frac{1}{iZ_0} (x_3 \mathbf{U}^{(-2)} + x_4 \mathbf{U}^{(-1)}), \quad z > \Delta,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – коэффициенты, подлежащие определению.

Для удовлетворения граничных условий (7) подставим поля (8), (1) в (7). Получим систему алгебраических уравнений

$$\sum_{s=1}^4 p_{ls} x_s = Q_l, \quad l = \overline{1, 4}, \tag{9}$$

где матричные элементы системы определяются формулами

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= i \left( -\alpha_2 B_{11} + \alpha_1 B_{12} + \frac{\alpha}{Z_0} (\alpha_1 B_{13} + \alpha_2 B_{14}) \right), \\
 p_{12} &= -\alpha (\alpha_1 B_{11} + \alpha_2 B_{12}) - \frac{1}{Z_0} (\alpha_2 B_{13} - \alpha_1 B_{14}), \\
 p_{13} &= i \alpha_2 F, \quad p_{14} = -\alpha \alpha_1 F, \quad F = \exp(ik_0 \Delta \alpha), \\
 p_{21} &= i \left( -\alpha_2 B_{21} + \alpha_1 B_{22} + \frac{\alpha}{Z_0} (\alpha_1 B_{23} + \alpha_2 B_{24}) \right), \\
 p_{22} &= -\alpha (\alpha_1 B_{21} + \alpha_2 B_{22}) - \frac{1}{Z_0} (\alpha_2 B_{23} - \alpha_1 B_{24}), \\
 p_{23} &= -i \alpha_1 F, \quad p_{24} = -\alpha \alpha_2 F, \\
 p_{31} &= i \left( -\alpha_2 B_{31} + \alpha_1 B_{32} + \frac{\alpha}{Z_0} (\alpha_1 B_{33} + \alpha_2 B_{34}) \right), \\
 p_{32} &= -\alpha (\alpha_1 B_{31} + \alpha_2 B_{32}) - \frac{1}{Z_0} (\alpha_2 B_{33} - \alpha_1 B_{34}), \\
 p_{33} &= i \frac{\alpha \alpha_1}{Z_0} F, \quad p_{34} = \frac{\alpha_2}{Z_0} F, \\
 p_{41} &= i \left( -\alpha_2 B_{41} + \alpha_1 B_{42} + \frac{\alpha}{Z_0} (\alpha_1 B_{43} + \alpha_2 B_{44}) \right), \\
 p_{42} &= -\alpha (\alpha_1 B_{41} + \alpha_2 B_{42}) - \frac{1}{Z_0} (\alpha_2 B_{43} - \alpha_1 B_{44}), \\
 p_{43} &= i \frac{\alpha \alpha_2}{Z_0} F, \quad p_{44} = -\frac{\alpha_1}{Z_0} F.
 \end{aligned}$$

Вектор-столбец  $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)^T = \hat{B}\mathbf{W}$ , где

$$\mathbf{W} = (f_x, f_y, g_x, g_y)^T, \quad f_x = i\alpha_2 A - \alpha\alpha_1 B, \quad f_y = -i\alpha_1 A - \alpha\alpha_2 B,$$

$$g_x = \frac{1}{Z_0}(\alpha_2 B + i\alpha\alpha_1 A), \quad g_y = -\frac{1}{Z_0}(\alpha_1 B - i\alpha\alpha_2 A),$$

$$\alpha_1 = \cos \varphi_0, \quad \alpha_2 = \sin \varphi_0.$$

**Результаты численного моделирования**

Предложенная методика реализована в виде программного комплекса, позволяющего рассчитывать прошедшее и отраженное поля при взаимодействии плоской электромагнитной волны с плоским слоем из биизотропного материала. Направление распространения и поляризация падающей электромагнитной волны могут быть произвольными. Проведено комплексное тестирование методики и программы с использованием результатов, полученных другими методами вычислительной электродинамики (методами конечных разностей во временной области и минимальных автономных блоков). Для слоев из материалов без поглощения контроль точности проводился также по балансу суммарной мощности электромагнитной энергии.

В качестве примера, иллюстрирующего точность моделирования, на рис. 1 показаны частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения при взаимодействии нормально падающей к поверхности плоского слоя линейно поляризованной электромагнитной волны ( $\theta_0 = 0, A = 1, B = 0$ ). Там же приведены результаты из работы [8], полученные методом конечных разностей во временной области (FD-TD). В основе этого метода лежит численное решение уравнений Максвелла с использованием конечно-разностных рекуррентных алгоритмов. Результаты расчетов представляются в виде коэффициентов отражения  $R_{1,2}$  и прохождения  $T_{1,2}$  по двум ортогональным поляризациям. Коэффициенты отражения и прохождения связаны с элементами вектора решения системы (9) следующим образом:  $R_1 = x_1, R_2 = x_2, T_1 = x_3, T_2 = x_4$ . Плоский слой имеет параметры: толщина  $\Delta = 10$  см,  $\epsilon_r = 2, \mu_r = 1, \chi = 0, \kappa = 0,3$ . Наблюдается хорошее соответствие результатов, полученных разными методами.

Потенциальные возможности методики иллюстрируют результаты анализа поляризационных свойств плоского слоя из кирального материала с параметрами: толщина  $\Delta = 5$  см,  $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1, \chi = 0, \kappa = 0,5$ . На рис. 2 а приведены коэффициенты отражения и прохождения по основной и ортогональной поляризациям для случая, когда  $\theta_0 = 0, A = 1, B = 0$ . Результаты расчетов показывают воз-

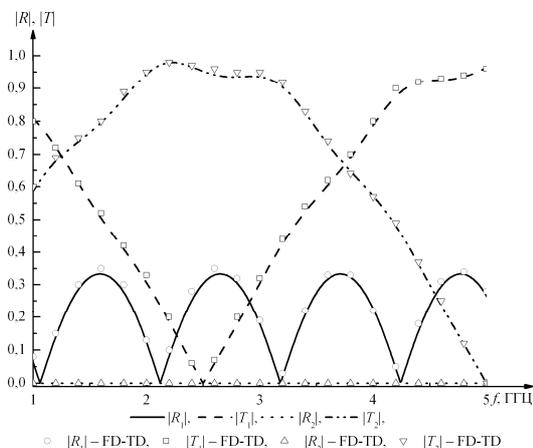


Рис. 1. Частотная зависимость коэффициентов прохождения и отражения для плоского слоя из кирального материала

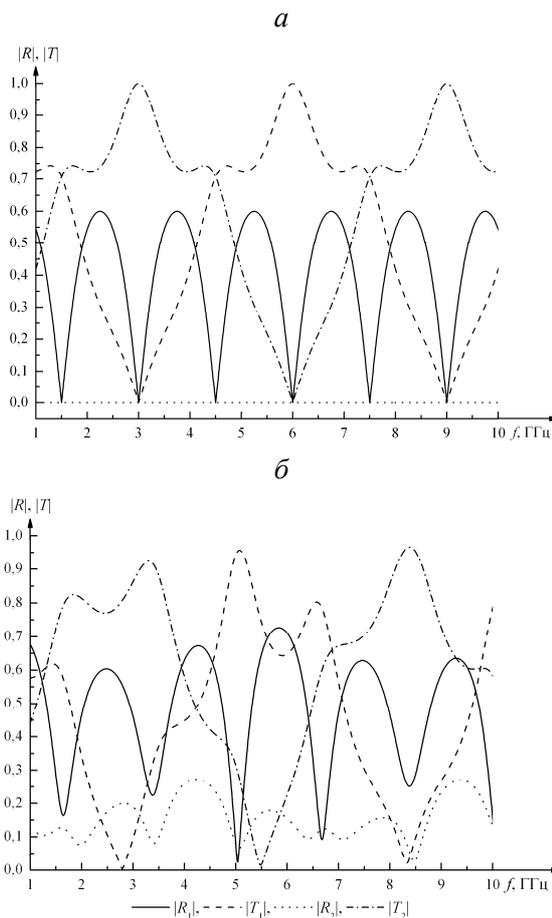


Рис. 2. Частотная зависимость амплитуды коэффициентов прохождения и отражения для плоского слоя из кирального материала ( $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1, \chi = 0, \kappa = 0,5$ ) – а и из материала с биизотропными свойствами ( $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1, \chi = 0,5, \kappa = 0,5$ ) – б

возможность использования плоского слоя из кирального материала в качестве эффективного поляризатора. Частотная перестройка позволяет при полной прозрачности слоя осуществлять поворот плоскости поляризации прошедшей электромагнитной волны на  $90^\circ$  ( $f = 3; 9$  ГГц). На частотах  $f = 1,5; 4,5; 7,5$  ГГц поле полностью проходит через слой и имеет круговую поляризацию.

На рис. 2 б представлены результаты взаимодействия плоской электромагнитной волны с плоским слоем из биизотропного материала с параметрами:  $\Delta = 5$  см,  $\epsilon_r = 4$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\chi = 0,5$ ,  $\kappa = 0,5$ . Рассматривается случай наклонного падения волны ( $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $A = 1$ ,  $B = 0$ ). Частотные зависимости коэффициентов отражения и прохождения имеют сложный аperiодический характер.

Высокая вычислительная эффективность, точность и универсальность разработанной методики и реализации позволяют использовать ее в задачах оптимизации свойств плоских электромагнитных экранов, для тестирования других методов вычислительной электродинамики, при численном решении обратных задач для определения материальных параметров биизотропных материалов.

1. Tie Jun Cui, Smith D.R., Liu R. *Metamaterials. Theory, design, and applications*. 2009.
2. Lindell I.V., Sihvola A.H., Tretyakov S.A., Viitanen A.J. *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*. Boston, 1994.
3. Виноградов А.П. *Электродинамика композитных материалов*. М., 2001.
4. Неганов В.А., Осипов О.В. // *Физика волновых процессов и радиотехнических систем*. 2005. Т. 8. № 1. С. 7.
5. Ерофеенко В.Т., Тавакколи Д.П. // *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*. 2008. № 1. С. 49.
6. Халиуллин Д.Я., Третьяков С.А. // *Радиотехника и электроника*. 1998. Т. 43. № 1. С. 16.
7. Ерофеенко В.Т., Козловская И.С., Пулко Ю.В. // *Сборник докладов Десятой Российской научно-технической конференции по электромагнитной совместимости технических средств и электромагнитной безопасности. ЭМС-2008, Санкт-Петербург, 24–26 сент. 2008 г. СПб., 2008. С. 337.*
8. Demir V., Elsherbeni A., Arvas E. // *20th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics*. Syracuse, April 19–23. New York, 2004.

Поступила в редакцию 28.12.09.

**Виктор Тихонович Ерофеенко** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики.  
**Сергей Владимирович Малый** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры радиофизики.