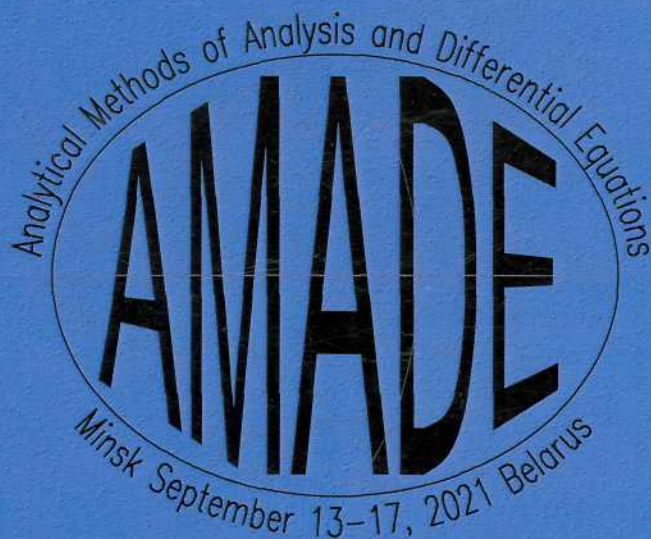




АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ANALYTICAL METHODS OF ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS



Материалы 10-го международного научного семинара
13 – 17 сентября 2021 года, Минск, Беларусь

Materials of the 10th International Workshop
September, 13 – 17, 2021, Minsk, Belarus

ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА

В. И. Корзюк, И. С. Козловская (Минск, Беларусь)

В работе в аналитическом виде представлено классическое решение смешанной задачи с граничными условиями Неймана для волнового уравнения в четверти плоскости в классе непрерывно дифференцируемых функций произвольного порядка. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши, на второй — условие Неймана. В четверти плоскости определяется классическое решение рассматриваемой задачи. Для построения этого решения выписывается частное решение исходного волнового уравнения. Для заданных функций задачи выписываются условия согласования, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи было классическим высокого порядка гладкости и единственным.

Постановка задачи. Относительно независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ рассматривается линейное одномерное волновое уравнение

$$Lu = (\partial_{x_0}^2 - a^2 \partial_{x_1}^2) u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty), \quad (1)$$

относительно искомой функции $u : \bar{Q} \ni \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, где $\partial_{x_0}, \partial_{x_1}$ — операторы частных производных первого порядка по переменным x_0 и x_1 соответственно, $\partial_{x_0}^2 = \partial_{x_0} \partial_{x_0}$, $\partial_{x_1}^2 = \partial_{x_1} \partial_{x_1}$, a^2 — положительное число из $\mathbb{R}$. Для уравнения (1) в четверти плоскости R^2 определяется классическое решение из класса $C^k(\bar{Q})$, $k \geq 2$, k — целое положительное число.

Область $Q = [0, \infty) \times [0, \infty)$ разделим на две подобласти

$$Q^{(j)} = \{ \mathbf{x} | (-1)^j (ax_0 - x_1) > 0 \}, \quad j = 1, 2$$

независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$. В $Q^{(j)}$ рассматриваем уравнение (1). На части границы ∂Q области Q к уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty), \quad (2)$$

а на оставшейся части границы ∂Q — граничное условие

$$\partial_{x_1} u(x_0, 0) = \mu(x_0), \quad x_0 \in [0, \infty). \quad (3)$$

Таким образом имеем смешанную задачу (1)–(3) для уравнения (1).

Задача. Определить в аналитическом виде классическое решение уравнения (1) из класса $C^k(\bar{Q})$ непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, $\bar{Q}$ — замыкание области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

Как известно [3], общее решение u уравнения (1) принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда оно представимо в виде суммы

$$u(\mathbf{x}) = u^{(0)}(\mathbf{x}) + v_p(\mathbf{x}), \quad (4)$$

где $u^{(0)}$ — общее решение из класса $C^k(\bar{Q})$ однородного уравнения

$$Lu^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

а $v_p \in C^k(\bar{Q})$ — частное решение уравнения (1).

Согласно [1] общее решение $u^{(0)}(\mathbf{x})$ из $C^k(\bar{Q})$ однородного уравнения (1) существует тогда и только тогда, когда оно представимо в виде [2]

$$u^{(0)}(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \quad (6)$$

где $g^{(1)}, g^{(2)}$ – произвольные функции из класса C^k – области определения этих функций для любых $x \in \bar{Q}$, $D(g^{(1)}) = \mathbb{R}$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$.

Решение задачи (1)–(3) находим согласно представлениям (4), (6). Частное решение уравнения (1) из класса C^k в явном виде построено в работах [2,3].

В работе получены условия согласования, при которых существует единственное классическое решение задачи (1)–(3) из класса $C^k(\bar{Q})$, представимое в аналитическом виде, где k – любое целое число и $k \geq 2$.

Литература

1. Корзюк В.И. Уравнения математической физики М.: ЛЕНАНД (2021).
2. Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю. Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения со смешанными условиями. Докл. НАН Беларуси Т. 62 No 6 (2018), 637–645.
3. Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю. Решение волнового уравнения в четверти плоскости. Труды ИМ НАН Беларуси Т. 28. No 1-2 (2020), 35–50.