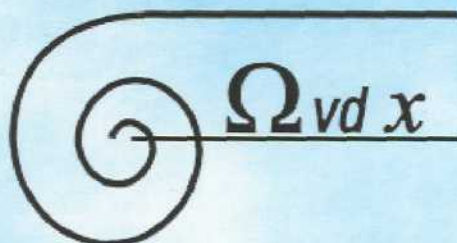


Минск, 1–4 июня 2021 г.
Международная математическая конференция



**Седьмые
Богдановские чтения
по обыкновенным
дифференциальным
уравнениям,
посвященные 100-летию
со дня рождения
профессора Ю.С. БОГДАНОВА**

Материалы конференции

Минск
2021

ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ

Корзюк В.И.^{1,2}, Козловская И.С.²

¹ Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
Korzyuk@mail.com

² Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
kozlovskaja@bsu.by

В работе в аналитическом виде представлено классическое решение в классе непрерывно дифференцируемых функций произвольного порядка со смешанными граничными условиями в четверти плоскости для волнового уравнения. Граница области состоит из двух перпендикулярных полупрямых. На одной из них задаются условия Коши. Вторая полупрямая разделена на две части: конечный отрезок и оставшаяся часть в виде полупрямой. На отрезке задается условие Дирихле, на второй части в виде полупрямой – условие Неймана. В четверти плоскости определяется классическое решение рассматриваемой задачи. Для построения этого решения записывается частное решение исходного волнового уравнения. Для заданных функций задачи записываются условия согласования, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы решение задачи было классическим высокого порядка гладкости и единственным.

Постановка задачи. Относительно независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$ на плоскости \mathbb{R}^2 рассматривается линейное одномерное волновое уравнение

$$Lu = (\partial_{x_0}^2 - a^2 \partial_{x_1}^2)u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{Q} = [0, \infty) \times [0, \infty), \quad (1)$$

относительно искомой функции $u : \bar{Q} \ni \mathbf{x} \rightarrow u(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, где ∂_{x_0} , ∂_{x_1} – операторы частных производных первого порядка по переменным x_0 и x_1 соответственно, $\partial_{x_0}^2 = \partial_{x_0} \partial_{x_0}$, $\partial_{x_1}^2 = \partial_{x_1} \partial_{x_1}$, a^2 – положительное число из \mathbb{R} . Для уравнения (1) в четверти плоскости R^2 определяется классическое решение из класса $C^k(\bar{Q})$, $k \geq 2$, k – целое положительное число.

Область $Q = [0, \infty) \times [0, \infty)$ разделим на две подобласти

$$Q^{(j)} = \{\mathbf{x} : (-1)^j(ax_0 - x_1) > 0\}, \quad j = 1, 2,$$

независимых переменных $\mathbf{x} = (x_0, x_1)$. В $Q^{(j)}$ рассматриваем уравнение (1). На части границы ∂Q области Q к уравнению (1) присоединяются условия Коши

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, \infty), \quad (2)$$

а на оставшейся части границы ∂Q – граничные условия

$$u(x_0, 0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad x_0 \in [0, \tau), \quad (3)$$

$$\partial_{x_1} u(x_0, 0) = \mu^{(2)}(x_0), \quad x_0 \in [\tau, \infty), \quad (4)$$

где $\tau \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Таким образом имеем смешанную задачу (1)–(4) для уравнения (1).

Задача. Определить в аналитическом виде классическое решение уравнения (1) из класса $C^k(\bar{Q})$ непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, \bar{Q} – замыкание области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$.

Как известно [3], общее решение u уравнения (1) принадлежит классу $C^k(\bar{Q})$ тогда и только тогда, когда оно представимо в виде суммы

$$u(\mathbf{x}) = u^{(0)}(\mathbf{x}) + v_p(\mathbf{x}), \quad (5)$$

где $u^{(0)}$ – общее решение из класса $C^k(\bar{Q})$ однородного уравнения

$$Lu^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad (6)$$

а $v_p \in C^k(\bar{Q})$ – частное решение уравнения (1).

Согласно [3] общее решение $u^{(0)}(\mathbf{x})$ из $C^k(\bar{Q})$ однородного уравнения (1) тогда и только тогда, когда оно представимо в виде [1]

$$u^{(0)}(\mathbf{x}) = g^{(1)}(x_1 - ax_0) + g^{(2)}(x_1 + ax_0), \quad (7)$$

где $g^{(j)}$ – произвольные функции из класса $C^k(D(g^{(j)}))$, $j = 1, 2$, $(D(g^{(j)}))$ – области определения функций $g^{(j)}$ для любых $\mathbf{x} \in \bar{Q}$, $D(g^{(1)}) = \mathbb{R}$, $D(g^{(2)}) = [0, \infty)$.

Решение задачи (1)–(4) находим согласно представлениям (5), (7). Частное решение уравнения (1) из класса $C^k(D(g^{(j)}))$ в явном виде построено в работах [1, 2]. В данной работе воспользуемся этим частным решением v_p .

Теорема. Пусть выполнены включения

$$\varphi \in C^k([0, \infty)), \quad \psi \in C^{(k-1)}([0, \infty)), \quad f \in C^{(k-1)}(\bar{Q}),$$

$$\mu^{(1)} \in C^k([0, \infty)), \quad \mu^{(2)} \in C^{(k-1)}([0, \infty)).$$

Существует единственное классическое решение задачи (1)–(4) из класса $C^k(\bar{Q})$, представимое в аналитическом виде, тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования

$$d^s \mu^{(1)}(0) - a^{s-1} d^{(s-1)} \psi(0) = d_{x_0}^s v_p(0, 0) - a^{s-1} \partial_{x_0} \partial^{(p-1)} v_p(0, 0), \quad s = 3, 5, \dots, \quad s \leq k.$$

$$\begin{aligned} d^s \mu^{(1)}(\tau) - a d^{s-1} \mu^{(2)}(\tau) - a^s d^s \varphi(a\tau) - a^{s-1} d^{s-1} \psi(a\tau) = \\ = a \partial_{x_0}^{s-1} \partial_{x_1} v_p(\tau, 0) - a^{s-1} \partial_{x_0} \partial_{x_1}^{s-1} v_p(0, a\tau), \quad s = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

где k – любое целое число и $k \geq 2$.

Литература

1. Корзюк В.И., Козловская И.С., Соколович В.Ю. Классическое решение в четверти плоскости смешанной задачи для волнового уравнения со смешанными условиями // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62. № 6. С. 637–645.

1. Корзюк В. И. Уравнения математической физики. М.: ЛЕНАНД, 2021. – 480с.

3. Корзюк В. И., Козловская И. С., Соколович В. Ю. Решение волнового уравнения в четверти плоскости // Тр. Ин-т математики НАН Беларуси. 2020. Т. 28. № 1-2. С. 35–50.