УДК 539.32:536.2

ВЛИЯНИЕ ПРОТЯЖЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРОФИЛИРОВАННЫХ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНАХ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСНОВАНИЯМИ

***В. В. КОРОЛЕВИЧ*[1], *Д. Г. МЕДВЕДЕВ*[2]**

[1]*Международный центр современного образования, ул. Штепанска, 61, 110 00, г. Прага 1, Чехия*
[2]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Приводится решение стационарной задачи теплопроводности для профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластин с теплоизолированными основаниями от N протяженных источников тепла на их внешних границах. Распределение температур в таких пластинах является неосесимметричным. Решение стационарной задачи теплопроводности для анизотропных кольцевых пластин произвольного профиля записывается через решение соответствующего интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода. Представлена формула расчета температур в анизотропных кольцевых пластинах произвольного профиля. Получено точное решение стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины степенного профиля. Показано, что в такой анизотропной пластине распределение температуры от N протяженных источников тепла на ее внешней границе имеет более сложный характер, чем в случае распределения температуры от N точечных источников тепла на ее внешней границе.

Ключевые слова: полярно-ортотропная кольцевая пластина; температура; стационарное уравнение теплопроводности; интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода; пластина степенного профиля.

Образец цитирования:
Королевич ВВ, Медведев ДГ. Влияние протяженных источников тепла на распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с теплоизолированными основаниями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;2:99–104.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-99-104

For citation:
Karalevich UV, Medvedev DG. Influence of extended heat sources on the temperature distribution in profiled polar-orthotropic annular plates with heat-insulated bases. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;2:99–104. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-99-104

Авторы:
Владимир Васильевич Королевич – преподаватель.
Дмитрий Георгиевич Медведев – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент; первый проректор.

Authors:
Uladzimir V. Karalevich, lecturer.
v.korolevich@mail.ru
Dmitrij G. Medvedev, doctor of science (pedagogics), PhD (physics and mathematics), docent; first vice-rector.
medvedev@bsu.by

Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2021;2:99–104
Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics. 2021;2:99–104

INFLUENCE OF EXTENDED HEAT SOURCES ON THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN PROFILED POLAR-ORTHOTROPIC ANNULAR PLATES WITH HEAT-INSULATED BASES

U. V. KARALEVICH[a]***, D. G. MEDVEDEV***[b]

[a]*International Center of Modern Education, 61 Štěpánská Street, Prague 1, PSČ 110 00, Czech*
[b]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: U. V. Karalevich (v.korolevich@mail.ru)

The solution of the stationary heat conduction problem for profiled polar-orthotropic annular plates with heat-insulated bases from *N* extended heat sources at their external border is presented. The temperature distribution in such plates will be non-axisymmetric. The solution of the stationary heat conduction problem for anisotropic annular plates of an random profile is resolved through the solution of the corresponding Volterra integral equation of the second kind. The formula of a temperature calculations in anisotropic annular plates of an random profile is given. The exact solution of stationary heat conduction problem for polar-orthotropic annular plate of an exponential profile is recorded. The temperature distribution in such anisotropic plate from *N* extended heat sources at its outer border is more complex than in the case of temperature distribution from *N* point heat sources at their external border.

Keywords: polar-orthotropic annular plate; temperature; stationary equation of heat conduction; Volterra integral equation of the second kind; plate of an exponential profile.

Введение

В данной статье исследуется неосесимметричное распределение температуры $T(r, \theta)$ в полярно-ортотропных кольцевых пластинах переменной толщины $h(r)$ с теплоизолированными основаниями, когда на внутреннем контуре ($r = r_0$) пластины поддерживается постоянная температура T_1^*, а на внешнем контуре ($r = R$) приложены N источников тепла с температурой T_2^* каждый.

В отличие от работы [1] в настоящей статье учитывается *дискретность* расположения *протяженных источников тепла* на внешнем контуре анизотропной кольцевой пластины. Полученные результаты имеют практическую значимость при проектировании и расчете на прочность профилированных кольцевых пластин аппаратов пищевой и химической промышленности, изготавливаемых из современных композитных материалов. Возникающие в них термоупругие напряжения могут существенно влиять на напряженно-деформированное состояние кольцевых пластин аппарата. Расчетная схема, учитывающая протяженность конечного числа источников тепла на внешней границе профилированных анизотропных кольцевых пластин, позволяет реально оценить вклад термоупругих напряжений в общую картину распределения напряжений в данных кольцевых пластинах аппаратов пищевых и химических производств.

Постановка задачи и основные уравнения

В работе исследуется влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в анизотропной кольцевой пластине переменной толщины, основания которой при $z = \pm\frac{h}{2}$ теплоизолированы. Теплообмен нагретой тонкой кольцевой пластины с внешней средой через боковую цилиндрическую поверхность пренебрежимо мал, и его можно не учитывать в расчетах. Предполагается, что температура в тонкой кольцевой пластине не меняется по толщине. Внутренних источников тепла в ней не имеется, а тепловое поле является плоским и неосесимметричным. Теплофизические характеристики материала пластины будем полагать постоянными и не зависящими от температуры.

Конечно, идеальных точечных источников тепла в природе не существует. Все они имеют какую-то протяженность. В работе [2] нами получено распределение температуры на внешнем контуре $T^{\text{внеш}}$, если N протяженных источников тепла с температурой T_2^* каждый приложены на равноотстоящих одинаковых дугах длиной l с центральным углом φ ($l = \varphi R$):

$$T^{\text{внеш}}(R, \theta, \varphi) = NT_2^*\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\cos Nn\theta\right).$$

Ниже центральным углом φ будет определяться протяженность источника тепла на внешней границе кольцевой пластины.

Количество N источников тепла не может быть произвольным, а ограничивается температурой плавления $T_{\text{плавл}}$ материала пластины: $N_{\max} = \left[\dfrac{T_{\text{плавл}}}{T_2^*} \right]$, где квадратные скобки означают целую часть дробного выражения.

В цилиндрической системе координат r, θ, z уравнение стационарной теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины $h(r)$ с теплоизолированными основаниями имеет вид [3]

$$\lambda_r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + 1 \right) \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \lambda_\theta \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0, \tag{1}$$

где λ_r и λ_θ – радиальный и тангенциальный коэффициенты теплопроводности материала пластины, не зависящие от температуры $T(r, \theta, \varphi)$.

Разложим функцию $T(r, \theta, \varphi)$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$T(r, \theta, \varphi) = T_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} T_{Nn}^{(1)}(r, \varphi) \cos nN\theta + \sum_{n=1}^{\infty} T_{Nn}^{(2)}(r, \varphi) \sin nN\theta. \tag{2}$$

Первое слагаемое $T_0(r)$ в разложении (2) описывает осесимметричное распределение температуры в пластине. Слагаемые, содержащие $\cos nN\theta$, соответствуют симметричным составляющим функции $T(r, \theta, \varphi)$ относительно плоскости $\theta = 0$, а слагаемые, содержащие $\sin nN\theta$, – обратно симметричным.

Подстановка разложения (2) в уравнение (1) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент $T_0(r)$, $T_{Nn}^{(i)}(r, \varphi)$ $(i = 1, 2)$:

$$\begin{cases} (n=0) \quad \dfrac{d^2 T_0}{dr^2} + \left(\dfrac{h'(r)}{h(r)} + \dfrac{1}{r} \right) \dfrac{dT_0}{dr} = 0, & (3) \\[2ex] (n \ge 1) \quad \dfrac{d^2 T_{Nn}^{(i)}}{dr^2} + \left(\dfrac{h'(r)}{h(r)} + \dfrac{1}{r} \right) \dfrac{dT_{Nn}^{(i)}}{dr} - \dfrac{\lambda_\theta}{\lambda_r} \dfrac{(Nn)^2}{r^2} T_{Nn}^{(i)}(r, \varphi) = 0. & (4) \end{cases}$$

Получим теперь граничные условия для функции температуры $T(r, \theta, \varphi)$.

$$\begin{cases} T(r_0, \theta, \varphi) = T_0(r_0) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n^{(1)}(r_0, \varphi) \cos Nn\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n^{(2)}(r_0, \varphi) \sin Nn\theta = \\[2ex] = T^{\text{внутр}}(r_0, \theta) = T_1^* + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \cos Nn\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin Nn\theta, \\[2ex] T(R, \theta, \varphi) = T_0(R) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n^{(1)}(R, \varphi) \cos Nn\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n^{(2)}(R, \varphi) \sin Nn\theta = \\[2ex] = T^{\text{внеш}}(R, \theta, \varphi) = NT_2^* + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2NT_2^* \dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi} \cos Nn\theta + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 \cdot \sin Nn\theta. \end{cases}$$

Из сравнения коэффициентов тригонометрических рядов при одинаковых гармониках левых и правых частей приведенных выражений следуют граничные условия

$$(n=0) \quad \begin{cases} T_0(r_0) = T_1^*, \\ T_0(R) = NT_2^*, \end{cases} \tag{5}$$

$$(n \ge 1) \quad \begin{cases} T_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi) = 0, \\ T_{Nn}^{(1)}(R, \varphi) = 2NT_2^* \dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}, \end{cases} \tag{6}$$

$$(n \geq 1) \quad \begin{cases} T_{Nn}^{(2)}(r_0, \varphi) = 0, \\ T_{Nn}^{(2)}(R, \varphi) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

При нулевых граничных условиях (7) однородное дифференциальное уравнение (4) имеет тривиальное решение, следовательно, функция $T_{Nn}^{(2)}(r, \varphi)$ равна нулю, т. е. обратно симметричная составляющая в разложении (2) для функции $T(r, \theta, \varphi)$ отсутствует.

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3) легко интегрируется, и его решение при заданных граничных условиях (5) имеет вид

$$T_0(r) = \left(1 - \frac{\int\limits_{r_0}^{r} \frac{ds}{sh(s)}}{\int\limits_{r_0}^{R} \frac{ds}{sh(s)}} \right) T_1^* + \frac{\int\limits_{r_0}^{r} \frac{ds}{sh(s)}}{\int\limits_{r_0}^{R} \frac{ds}{sh(s)}} NT_2^*.$$

Решение неосесимметричной задачи стационарной теплопроводности методом линейных интегральных уравнений Вольтерры 2-го рода

Для профилированной анизотропной кольцевой пластины общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (4) системы выразим через решение соответствующего ему интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода:

$$T_{Nn}^{(1)}(r, \varphi) = \int\limits_{r_0}^{r} (r - s)\eta_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds + \dot{T}_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi)(r - r_0) + T_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi). \tag{8}$$

Здесь разрешающая функция $\eta_{Nn}^{(1)}(r, \varphi)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерры 2-го рода:

$$\eta_{Nn}^{(1)}(r, \varphi) = \lambda \int\limits_{r_0}^{r} K_{Nn}(r, s)\eta_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds + f_{Nn}^{(1)}(r, \varphi), \tag{9}$$

где $\lambda = -1$ есть числовой параметр; $K_{Nn}(r, s) = \frac{1}{r} + \frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}\frac{(Nn)^2}{r^2}(r - s)$ – ядро интегрального уравнения; $f_{Nn}^{(1)}(r, \varphi) = \frac{\partial K_{Nn}(r, s)}{\partial s} T_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi) - K_{Nn}(r, r_0)\dot{T}_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi)$ – свободный член интегрального уравнения.

Общее решение интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода (9) записывается с помощью *резольвенты* $R_{Nn}(r, s; \lambda)$ в виде [4]

$$\eta_{Nn}^{(1)}(r, \varphi) = \lambda \int\limits_{r_0}^{r} R_{Nn}(r, s; \lambda) f_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds + f_{Nn}^{(1)}(r, \varphi),$$

где функция $R_{Nn}(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом

$$R_{Nn}(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{Nn,\, m+1}(r, s),$$

который для непрерывных итерированных ядер $K_{Nn,\, m}(r, s)$ сходится абсолютно и равномерно.

Используя граничные условия (6), найдем постоянные $T_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi)$, $\dot{T}_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi)$:

$$\begin{cases} T_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi) = 0, \\ T_{Nn}^{(1)}(R, \varphi) = \int\limits_{r_0}^{R} (R - s)\eta_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds + \dot{T}_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi)(R - r_0) = 2NT_2^* \frac{\sin n\varphi}{n\varphi}. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} T_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi) = 0, \\ \dot{T}_{Nn}^{(1)}(r_0, \varphi) = \frac{1}{R - r_0}\left(-\int\limits_{r_0}^{R} (R - s)\eta_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds + 2NT_2^* \frac{\sin n\varphi}{n\varphi} \right). \end{cases}$$

Окончательное выражение для компонент $T_{Nn}^{(1)}(r, \varphi)$ имеет вид

$$T_{Nn}^{(1)}(r, \varphi) = \int_{r_0}^{r} (r - s)\eta_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds - \frac{r - r_0}{R - r_0}\int_{r_0}^{R} (R - s)\eta_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds + 2NT_2^* \frac{r - r_0}{R - r_0}\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}. \quad (10)$$

Подставляя формулы (8) и (10) для компонент $T_0(r)$, $T_{Nn}^{(1)}(r, \varphi)$ в разложение (2), получаем в общем случае распределение температуры $T(r, \theta, \varphi)$ в профилированной анизотропной кольцевой пластине с теплоизолированными основаниями от протяженных источников тепла на ее внешней границе:

$$T(r, \theta, \varphi) = \left(1 - \frac{\int_{r_0}^{r} \frac{ds}{sh(s)}}{\int_{r_0}^{R} \frac{ds}{sh(s)}}\right) T_1^* + \left\{ \frac{\int_{r_0}^{r} \frac{ds}{sh(s)}}{\int_{r_0}^{R} \frac{ds}{sh(s)}} + 2\left(\frac{r - r_0}{R - r_0}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\cos nN\theta + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{r_0}^{r} (r - s)\eta_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds - \frac{(r - r_0)}{(R - r_0)}\int_{r_0}^{R} (R - s)\eta_{Nn}^{(1)}(s, \varphi)ds\right]\cos nN\theta \right\} NT_2^*. \quad (11)$$

Для полярно-ортотропной кольцевой пластины, толщина которой меняется по степенному закону $h(r) = h_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\alpha}$, где $\alpha \in R \setminus \{0\}$ и h_0 – толщина пластины на внутреннем контуре при $r = r_0$, система обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) имеет точное решение, удовлетворяющее граничным условиям (5), (6):

$$\begin{cases} T_0(r) = \left(\dfrac{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha}}{1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\alpha}}\right) T_1^* + \left(\dfrac{\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha} - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\alpha}}{1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{\alpha}}\right) NT_2^*, \\ T_{Nn}^{(1)}(r, \varphi) = -2NT_2^*\left[\dfrac{\delta^{k_2(n)}}{\left(\delta^{k_1(n)} - \delta^{k_2(n)}\right)}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{k_1(n)} - \dfrac{\delta^{k_1(n)}}{\left(\delta^{k_1(n)} - \delta^{k_2(n)}\right)}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{k_2(n)}\right]\dfrac{\sin n\varphi}{n\varphi}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь $\delta = \frac{r_0}{R}$, $k_{1,2}(n) = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{\lambda_\theta}{\lambda_r}(Nn)^2}$ – корни характеристического уравнения.

Введем безразмерную координату $x = \frac{r}{R}$ и подставим решения (12) в разложение (2). В результате имеем неосесимметричное распределение температуры в полярно-ортотропной кольцевой пластине степенного профиля с теплоизолированными основаниями от N протяженных источников тепла на ее внешней границе:

$$T(x, \theta, \varphi) = \left(\frac{1 - x^{\alpha}}{1 - \delta^{\alpha}}\right) T_1^* +$$

$$+ \left\{\left(\frac{x^{\alpha} - \delta^{\alpha}}{1 - \delta^{\alpha}}\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\delta^{k_2(n)}}{\left(\delta^{k_1(n)} - \delta^{k_2(n)}\right)}x^{k_1(n)} - \frac{\delta^{k_1(n)}}{\left(\delta^{k_1(n)} - \delta^{k_2(n)}\right)}x^{k_2(n)}\right]\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\cos nN\theta\right\} NT_2^*. \quad (13)$$

Совершая предельный переход $\varphi \to 0$ $\left(\lim_{\varphi \to 0}\frac{\sin n\varphi}{n\varphi} = 1\right)$ в формулах (11), (13), получаем неосесимметричное распределение температуры в анизотропных кольцевых пластинах переменной толщины от N точечных источников тепла на ее внешней границе.

Выводы

В профилированных анизотропных кольцевых пластинах распределение температуры от N протяженных источников тепла на внешней границе имеет более сложный характер, чем распределение температуры от N точечных источников тепла на внешней границе. Поскольку формулы (11), (13) содержат ряды, в которые входит тригонометрическая функция $\sin n\varphi$, то эти ряды будут знакопеременными. Более того, ввиду быстрого стремления к нулю осциллирующей функции $\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}$ при увеличении n в формулах (11), (13) при практических расчетах можно ограничиться только несколькими первыми членами рядов.

Библиографические ссылки

1. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Решение неосесимметричной стационарной задачи теплопроводности для полярно-ортотропной кольцевой пластины переменной толщины с теплоизолированными основаниями. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2018;1:77–87.

2. Королевич ВВ, Медведев ДГ. Влияние протяженности источников тепла на внешней границе на распределение температуры в профилированных полярно-ортотропных кольцевых пластинах с учетом теплообмена с окружающей средой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*. 2020;3:86–91. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-86-91.

3. Уздалев АИ. *Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела.* Саратов: Издательство Саратовского университета; 1967. 167 с.

4. Краснов МЛ, Киселев АИ, Макаренко ГИ. *Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями*. Москва: КомКнига; 2007. 192 с.

References

1. Karalevich UV, Medvedev DG. The solution of the nonaxisymmetric stationary problem of heat conduction for the polar-orthotropic annular plate of variable thickness with thermal insulated bases. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2018;1:77–87. Russian.

2. Karalevich UV, Medvedev DG. The influence of the length of heat sources on the external border on the temperature distribution in profiled polar-orthotropic ring plates taking into account there heat exchange with the external environment. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2020;3:86–91. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2020-3-86-91.

3. Uzdalev AI. *Nekotorye zadachi termouprugosti anizotropnogo tela* [Some problems of thermoelasticity of an anisotropic body]. Saratov: Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta; 1967. 167 p. Russian.

4. Krasnov ML, Kiselev AI, Makarenko GI. *Integral'nye uravneniya: zadachi i primery s podrobnymi resheniyami* [Integral equations: problems and examples with detailed solutions]. Moscow: KomKniga; 2007. 192 p. Russian.

Получена 04.05.2021 / исправлена 02.06.2021 / принята 02.06.2021.
Received 04.05.2021 / revised 02.06.2021 / accepted 02.06.2021.