УДК 517.547.59

О СВОЙСТВАХ *h*-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. ПАВЛОВСКИЙ[1]***, И. Л. ВАСИЛЬЕВ***[1]

[1]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Исследования в области теории функций *h*-комплексной переменной представляют интерес в связи с имеющимися приложениями в неевклидовой геометрии, теоретической механике и т. д. Изучены свойства *h*-дифференцируемых функций. Найдены критерии *h*-дифференцируемости и *h*-голоморфности, сформулирована и доказана теорема о конечных приращениях для *h*-голоморфной функции. Приведены достаточные условия *h*-аналитичности, сформулирована и доказана теорема единственности для *h*-аналитических функций.

Ключевые слова: кольцо *h*-комплексных чисел; делители нуля; *h*-дифференцируемость; *h*-голоморфность; *h*-аналитичность; конечные приращения функции; нули функции; ряд Тейлора.

ON PROPERTIES OF *h*-DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

V. A. PAVLOVSKY[a]***, I. L. VASILIEV***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: V. A. Pavlovsky (pavlad95@gmail.com)

Research in the theory of functions of an *h*-complex variable is of interest in connection with existing applications in non-Euclidean geometry, theoretical mechanics, etc. This article is devoted to the study of the properties of *h*-differentiable functions. Criteria for *h*-differentiability and *h*-holomorphy are found, formulated and proved a theorem on finite increments for an *h*-holomorphic function. Sufficient conditions for *h*-analyticity are given, formulated and proved a uniqueness theorem for *h*-analytic functions.

Keywords: ring of *h*-complex numbers; zero divisors; *h*-differentiability; *h*-holomorphy; *h*-analyticity; finite increments of a function; zeros of a function; Taylor series.

Множество *h*-комплексных чисел

Пусть $\mathbb{C}_h$ – множество всех *h*-комплексных (двойных) чисел [1–7], т. е. множество упорядоченных пар вещественных чисел, на котором заданы операции сложения и умножения $\forall z_1 = (a;\, b),\ z_2 = (c;\, d) \in \mathbb{C}_h$ по правилам:

1) $z_1 + z_2 = (a + c;\, b + d)$;

2) $z_1 \cdot z_2 = (ac + bd;\, ad + bc)$.

Образец цитирования:
Павловский ВА, Васильев ИЛ. О свойствах *h*-дифференцируемых функций. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;2:29–37.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-29-37

For citation:
Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On properties of *h*-differentiable functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;2:29–37. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-2-29-37

Авторы:
Владислав Андреевич Павловский – аспирант кафедры теории функций механико-математического факультета. Научный руководитель – И. Л. Васильев.
Игорь Леонидович Васильев – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Authors:
Vladislav A. Pavlovsky, postgraduate student at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
pavlad95@gmail.com
Igor L. Vasiliev, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
vassilyevi@bsu.by

Вещественную единицу отождествим с h-комплексным числом $(1;\,0)$. Гиперболической единицей назовем h-комплексное число $j=(0;\,1)$. Тогда любое число из $\mathbb{C}_h$ может быть представлено в алгебраической форме:

$$z=(a;\,b)=(a;\,0)+(0;\,b)=a\cdot(1;\,0)+b\cdot(0;\,1)=a+jb=\operatorname{Re}z+j\operatorname{Hyp}z,$$

где $a=\operatorname{Re}z$ – вещественная часть числа z, а $b=\operatorname{Hyp}z$ – гиперболическая часть числа z.

Как показано в работе [6], множество h-комплексных чисел $\mathbb{C}_h$ есть кольцо с делителями нуля, каковыми являются числа вида $a\pm aj$. Особо стоит отметить случай, когда $a=\frac{1}{2}$. Тогда делители нуля обладают следующими свойствами:

• $\left(\frac{1\pm j}{2}\right)^n=\frac{1\pm j}{2}\ \forall n\in\mathbb{N}$;

• числа $\frac{1\pm j}{2}$ образуют базис в $\mathbb{C}_h$, т. е. любое h-комплексное число $a+jb$ можно однозначно представить в виде

$$a+jb=(a+b)\frac{1+j}{2}+(a-b)\frac{1-j}{2}.$$

Норму элемента $z=a+jb$ в кольце $\mathbb{C}_h$ определим следующим образом: $\|z\|=|a|+|b|$, а модулем h-комплексного числа назовем, как обычно, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Приведем свойства нормы:

1) $\|z\|=0\Leftrightarrow z=0$;

2) $|z|=\sqrt{a^2+b^2}\le|a|+|b|=\|z\|\le\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}|z|$;

3) $\|\alpha z\|=|\alpha|\cdot\|z\|\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$;

4) $\|z_1\cdot z_2\|\le\|z_1\|\cdot\|z_2\|\ \forall z_1,\,z_2\in\mathbb{C}_h$;

5) $\left\|z^n\right\|=\|z\|^n\ \forall n\in\mathbb{N}$;

6) $\frac{1}{\|z\|}\le\left\|\frac{1}{z}\right\|$.

На множестве $\mathbb{C}_h$ топология вводится с помощью вышеуказанной нормы.

h-Дифференцируемость функций

Пусть D – область в $\mathbb{C}_h$, а $f:D\to\mathbb{C}_h$.

Определение 1. Функция f называется h-дифференцируемой в точке $z\in D$, если существует такое число $k\in\mathbb{C}_h$, что

$$f(z+h)-f(z)=kh+\alpha(h)h,\tag{1}$$

где $h\in D$ не является делителем нуля, причем $z+h\in D$, а $\lim\limits_{h\to0}\alpha(h)=0$, k не зависит от h.

Определение 2. Производной функции f h-комплексного аргумента $z\in D$ называется выражение вида

$$f'(z)=\lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},\tag{2}$$

где $h\in\mathbb{C}_h$ не является делителем нуля. Предел берется по норме из $\mathbb{C}_h$.

Производные суммы, разности, произведения, частного от деления и композиции функций вычисляются по тем же формулам, что и в классическом анализе, при условии, что они определены.

Теорема 1. *Функция $f(z)$ h-дифференцируема в точке $z\in D$ тогда и только тогда, когда выполняется (2).*

Доказательство проводится так же, как и в случае аналитической функции комплексного переменного, при этом $f'(z)=k$ из (1).

Любая h-комплексная функция $f(z)=f(x+jy)$ представима в алгебраической форме:

$$f(z)=u(x,\,y)+jv(x,\,y).$$

Теорема 2. *Пусть функция* $f(z)=u(x, y)+jv(x, y)$ *определена в окрестности точки* $z=x+jy$, *функции* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *дифференцируемы в точке* (x, y). *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) функция $f(z)$ *h-дифференцируема в точке z;*

2) в точке (x, y) *верны равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Доказательство. Покажем, что из первого утверждения следует второе. Пусть $h = s + jt$,

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Положим $t = 0$. В этом случае

$$f'(z)=\lim_{s\to 0}\frac{u(x+s, y)-u(x, y)}{s}+j\lim_{s\to 0}\frac{v(x+s, y)-v(x, y)}{s}=\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пусть $s = 0$, тогда

$$f'(z)=\lim_{t\to 0}\frac{u(x, y+t)-u(x, y)}{jt}+j\lim_{t\to 0}\frac{v(x, y+t)-v(x, y)}{jt}=\frac{\partial v}{\partial y}+j\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}+j\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+j\frac{\partial u}{\partial y},$$

следовательно, верны равенства (3).

Теперь покажем, что из второго утверждения следует первое. Пусть верны равенства (3), тогда

$$f(z+h)-f(z)=\left[u(x+s, y+t)-u(x, y)\right]+j\left[v(x+s, y+t)-v(x, y)\right]=$$

$$=\left(u'_x s+u'_y t+\alpha(h)h\right)+j\left(v'_x s+v'_y t+\beta(h)h\right)=u'_x(s+jt)+$$

$$+jv'_x(s+jt)+\left(\alpha(h)+j\beta(h)\right)h=\left(u'_x+jv'_x\right)h+\gamma(h)h,$$

где $\gamma(h)=\alpha(h)+j\beta(h)$, $\lim\limits_{h\to 0}\gamma(h)=0$, следовательно, функция $f(z)$ h-дифференцируема,

$$f'(z)=u'_x+jv'_x=v'_y+ju'_y.$$

Теорема доказана.

Замечание. Равенства (3) являются аналогом условий Коши – Римана.

h-Голоморфность функций

Определение 3. Функция $f(z)=u(x, y)+jv(x, y)$ называется h-голоморфной в точке $z_0=x_0+jy_0\in D$, если в некоторой окрестности этой точки функции u и v имеют непрерывные вторые частные производные и выполнены условия (3).

Введем обозначение $D^*=\left\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, z=x+jy\in D\right\}$ и далее будем считать, что функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы в D^*.

Теорема 3. *Функция f является h-голоморфной в точке* $z\in D$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(z)=\frac{1+j}{2}f(x+y)+\frac{1-j}{2}f(x-y). \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z)=u(x, y)+jv(x, y)$. Пусть выполнены условия (3), тогда функции u и v удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0. \tag{5}$$

Положим $\xi = \frac{1}{2}(x+y)$, $\eta = \frac{1}{2}(x-y)$. В этом случае

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = \dfrac{\partial u}{\partial x} x'_\xi + \dfrac{\partial u}{\partial y} y'_\xi = u'_x + u'_y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \dfrac{\partial u}{\partial x} x'_\eta + \dfrac{\partial u}{\partial y} y'_\eta = u'_x - u'_y. \end{cases}$$

Смешанные производные функций u и v равны нулю:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \; \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0.$$

Таким образом, уравнения (5) равносильны следующим уравнениям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \tag{5а}$$

Аналогично получаем уравнения для функции v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = 0. \tag{5б}$$

Найдем общее решение уравнений (5а) и (5б):

$$u'_\xi = \mu^*(\xi),$$

$$u(\xi, \eta) = \int \mu^*(\xi) d\xi = \tilde{\mu}(\xi) + \tilde{\psi}(\eta) =$$

$$= \tilde{\mu}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \tilde{\psi}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\mu(x+y) + \psi(x-y)\},$$

$$v'_\xi = \varphi^*(\xi),$$

$$v(\xi, \eta) = \int \varphi^*(\xi) d\xi = \tilde{\varphi}(\xi) + \tilde{\nu}(\eta) =$$

$$= \tilde{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) + \tilde{\nu}\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\{\varphi(x+y) + \nu(x-y)\}.$$

Из уравнений

$$u'_x = v'_y, \; v'_x = u'_y$$

вытекает

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\{\mu'(x+y) + \psi'(x-y)\} = \frac{1}{2}\{\varphi'(x+y) - \nu'(x-y)\}, \\ \frac{1}{2}\{\mu'(x+y) - \psi'(x-y)\} = \frac{1}{2}\{\varphi'(x+y) + \nu'(x-y)\}, \end{cases}$$

следовательно,

$$\begin{cases} \mu'(x+y) = \varphi'(x+y), \\ \psi'(x-y) = \nu'(x-y), \end{cases} \quad \begin{cases} \mu(x+y) = \varphi(x+y) + \alpha, \\ \psi(x-y) = \nu(x-y) + \beta, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \dfrac{1}{2}\{\varphi(x+y) + \psi(x-y) + \alpha\}, \\ v(x, y) = \dfrac{1}{2}\{\varphi(x+y) - \psi(x-y) + \beta\}. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} f(z) = f(x+jy) = u(x, y) + jv(x, y), \\ \overline{f}(z) = \overline{f}(x+jy) = u(x, y) - jv(x, y), \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = u(x, 0) + jv(x, 0), \\ \overline{f}(x) = u(x, 0) - jv(x, 0), \end{cases}$$

из этого следует, что

$$\begin{cases} u(x,0)=\frac{1}{2}\{f(x)+\overline{f}(x)\}, \\ v(x,0)=\frac{1}{2}\{f(x)-\overline{f}(x)\}, \end{cases} \quad \begin{cases} u(x,0)=\frac{1}{2}\{\varphi(x)+\psi(x)+\alpha\}, \\ v(x,0)=\frac{1}{2}\{\varphi(x)-\psi(x)+\beta\}, \end{cases}$$

а значит,

$$\begin{cases} \varphi(x)=u(x,0)+v(x,0)-\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \psi(x)=u(x,0)-v(x,0)-\frac{\alpha-\beta}{2}, \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} \varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+\overline{f}(x)\right)+\frac{j}{2}\left(f(x)-\overline{f}(x)\right)-\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \psi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+\overline{f}(x)\right)-\frac{j}{2}\left(f(x)-\overline{f}(x)\right)-\frac{\alpha-\beta}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(x)=\frac{1+j}{2}f(x)+\frac{1-j}{2}\overline{f}(x)-\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \psi(x)=\frac{1-j}{2}f(x)+\frac{1+j}{2}\overline{f}(x)-\frac{\alpha-\beta}{2}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$f(z)=u(x,y)+jv(x,y)=\frac{1}{2}\{\varphi(x+y)+\psi(x-y)+\alpha\}+\frac{j}{2}\{\varphi(x+y)-\psi(x-y)+\beta\},$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1+j}{2}f(x+y)+\frac{1-j}{2}\overline{f}(x+y)-\frac{\alpha+\beta}{2}+\alpha+\frac{1+j}{2}f(x-y)+\frac{1-j}{2}\overline{f}(x-y)-\frac{\alpha-\beta}{2}\right\}+$$

$$+\frac{j}{2}\left\{\frac{1+j}{2}f(x+y)+\frac{1-j}{2}\overline{f}(x+y)-\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1+j}{2}f(x-y)-\frac{1-j}{2}\overline{f}(x-y)+\frac{\alpha-\beta}{2}+\beta\right\}=$$

$$=\frac{1+j}{4}f(x+y)+\frac{1-j}{4}\overline{f}(x+y)+\frac{1-j}{4}f(x-y)+\frac{1+j}{4}\overline{f}(x-y)+\frac{1+j}{4}f(x+y)-$$

$$-\frac{1-j}{4}\overline{f}(x+y)+\frac{1-j}{4}f(x-y)-\frac{1+j}{4}\overline{f}(x-y)=\frac{1+j}{2}f(x+y)+\frac{1-j}{2}f(x-y).$$

Таким образом, справедливо равенство (4).

Обратно, пусть верно (4), тогда для функции $f(z)=u(x,y)+jv(x,y)$ положим $y=0$:

$$f(x)=u(x,0)+jv(x,0),$$

тогда

$$\begin{cases} f(x+y)=u(x+y,0)+jv(x+y,0), \\ f(x-y)=u(x-y,0)+jv(x-y,0). \end{cases}$$

Используя равенство (4), представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{1+j}{2}\left[u(x+y,0)+jv(x+y,0)\right]+\frac{1-j}{2}\left[u(x-y,0)+jv(x-y,0)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[u(x+y,0)+v(x+y,0)+u(x-y,0)-v(x-y,0)\right]+$$

$$+\frac{j}{2}\left[u(x+y,0)+v(x+y,0)-u(x-y,0)+v(x-y,0)\right]=u(x,y)+jv(x,y).$$

В силу

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

получаем, что теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть функция f h-голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}_h$ с кусочно-гладким краем ∂D и непрерывна в замыкании $\bar{D}=D\cup\partial D$. Тогда*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz=0.$$

Доказательство.

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz=\int\limits_{\partial D}\left[u(x, y)+jv(x, y)\right](dx+jdy)=$$

$$=\int\limits_{\partial D} u(x, y)dx+v(x, y)dy+j\int\limits_{\partial D} u(x, y)dy+v(x, y)dx,$$

используя формулу Грина, получаем

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz=\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+j\iint\limits_{D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

Теорема доказана.

Далее нам понадобится следующая теорема вещественного анализа, которая выводится из второй теоремы о конечных приращениях [8].

Теорема 5 (о конечных приращениях для отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$). *Пусть функция $F:\tilde{D}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ h-дифференцируема в точке $(a, b)\in\tilde{D}$. Тогда*

$$\left|F(a+s, b+t)-F(a, b)\right|\le\max_{\xi\in[0, 1]}\left|F'(a+\xi s, b+\xi t)\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}\right|. \tag{6}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию

$$g(\tau)=F(a+\tau s, b+\tau t),\ \ \tau\in[0, 1].$$

Имеем

$$g:[0, 1]\to\mathbb{R}^2,\ g(0)=F(a, b),\ g(1)=F(a+s, b+t),$$

$$g'=F'(a+\tau s, b+\tau t)\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}.$$

Положим

$$G(\tau)=\left\langle g(t)\middle|g(1)-g(0)\right\rangle,$$

$$G:[0, 1]\to\mathbb{R},\ G'(\tau)=\left\langle g'(t)\middle|g(1)-g(0)\right\rangle.$$

Отсюда по теореме Лагранжа следует, что

$$G(1)-G(0)=G'(\xi)\cdot 1,\ \text{ где }\ \xi\in[0, 1].$$

Используя неравенство Коши для скалярного произведения, получаем

$$G(1)-G(0)=\left\langle g(1)\middle|g(1)-g(0)\right\rangle-\left\langle g(0)\middle|g(1)-g(0)\right\rangle=\left\langle g(1)-g(0)\middle|g(1)-g(0)\right\rangle=$$

$$=\left|g(1)-g(0)\right|^2=\left\langle g'(\xi)\middle|g(1)-g(0)\right\rangle\le\left\langle\left|g'(\xi)\right|\middle|g(1)-g(0)\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\left|g(1)-g(0)\right|\le\max_{\xi\in[0, 1]}\left|g'(\xi)\right|.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству (6). Теорема доказана.

Представим функцию $F(x, y)$ в векторном виде: $F(x, y)=\begin{bmatrix}u(x, y)\\ v(x, y)\end{bmatrix}$, тогда

$$F'(x, y)=\begin{bmatrix}u'_x(x, y) & u'_y(x, y)\\ v'_x(x, y) & v'_y(x, y)\end{bmatrix}.$$

Теперь из неравенства (6) и неравенства Коши – Буняковского получаем

$$\left|F(a+s,\, b+t)-F(a,\, b)\right|=\left\|\begin{bmatrix} u(a+s,\, b+t)-u(a,\, b) \\ v(a+s,\, b+t)-v(a,\, b)\end{bmatrix}\right\|=\left\|\begin{bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{bmatrix}\right\|=\sqrt{|\Delta u|^2+|\Delta v|^2}\le$$

$$\le\max_{\xi\in[0,1]}\sqrt{\left(u_x's+u_y't\right)^2+\left(v_x's+v_y't\right)^2}\le\max_{\xi\in[0,1]}\sqrt{\left(|u_x'|^2+|u_y'|^2+|v_x'|^2+|v_y'|^2\right)\left(s^2+t^2\right)},\tag{7}$$

где все частные производные вычислены в точке $(a+\xi s,\, b+\xi t)$.

Пусть $f(z)=u(x,\, y)+jv(x,\, y)$ – h-голоморфная функция, тогда $u_x'=v_y'$, $u_y'=v_x'$, следовательно,

$$f'(z)=u_x'+jv_x'=u_x'+ju_y'=v_y'+jv_x'=v_y'+ju_y',$$

$$\left|f'(z)\right|=\sqrt{|u_x'|^2+|v_x'|^2}\le|u_x'|+|u_y'|=\left\|f'(z)\right\|,$$

$$\left\|f(z+h)-f(z)\right\|=\left\|\Delta u+j\Delta v\right\|=|\Delta u|+|\Delta v|\le\sqrt{2}\sqrt{|\Delta u|^2+|\Delta v|^2},\tag{8}$$

где $|h|=|s+jt|=\sqrt{s^2+t^2}\le|s|+|t|=\|h\|$.

Теорема 6 (о конечных приращениях для h-голоморфной функции). *Пусть функция f h-голоморфна в области $D\subset\mathbb{C}_h$. Тогда*

$$\left\|f(z+h)-f(z)\right\|\le 2\max_{\zeta\in[z,\, z+h]}\left\|f'(\zeta)\right\|\cdot\|h\|.\tag{9}$$

Доказательство. В силу неравенств (7) и (8) имеем

$$\left\|f(z+h)-f(z)\right\|\le\sqrt{2}\sqrt{|\Delta u|^2+|\Delta v|^2}\le$$

$$\le\max_{\xi\in[0,1]}\sqrt{2\left\{|u_x'|^2+|u_y'|^2\right\}\left\{s^2+t^2\right\}}\le 2\max_{\zeta\in[z,\, z+h]}\left|f'(\zeta)\right|\cdot|h|\le 2\max_{\zeta\in[z,\, z+h]}\left\|f'(\zeta)\right\|\cdot\|h\|.$$

Теорема доказана.

h-Аналитичность функций

Определение 4. Функция f называется h-аналитической в точке $z_0\in D$, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой f разлагается в сходящийся степенной ряд:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(z-z_0\right)^k,\ c_k\in\mathbb{C}_h.\tag{10}$$

Из определения вытекает, что h-аналитическая функция f бесконечно h-дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0, а ряд (10) есть ряд Тейлора функции f, т. е. $c_k=\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$.

Областью сходимости ряда (10) является открытый h-круг

$$G=\left\{\left\|z-z_0\right\|<r\right\},$$

где $r=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\|c_k\|}}$.

Теорема 7. *Пусть функция $f: D\to\mathbb{C}_h$ является бесконечное число раз h-дифференцируемой в области $D\subset\mathbb{C}_h$,*

$$\left\|f^{(n)}(z)\right\|\le Me^{AR^m}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall z\in\left\{\left\|z-z_0\right\|\le R\right\}\subset D,\tag{11}$$

M, A, m – некоторые положительные константы. Тогда f разлагается в ряд Тейлора:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\left(z-z_0\right)^k,\ z_0\in D,$$

равномерно сходящийся в круге $\left\|z-z_0\right\|\le R$.

Доказательство. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z)=T_n(z,\, z_0)+r_n(z),$$

где $T_n(z,\, z_0)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$; $r_n(z)$ – остаточный член. Составим вспомогательную функцию

$$F(t)=f(z)-T_n(z,\, t)=f(z)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(z-t)^k,$$

для нее имеем $F(z)=0,\ F(z_0)=r_n(z)$. Продифференцируем $F(t)$ по переменной t:

$$F'(t)=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(z-t)^n.$$

В силу неравенства (9) и условия (11) получаем

$$\|r_n(z)\|=\|F(z_0)-F(z)\|\le 2\max_{\zeta\in[z,\, z+h]}\|F'(\zeta)\|\cdot\|z_0-z\|\le 2\max_{\zeta\in[z,\, z+h]}\left\|\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(z-t)^n\right\|\cdot\|z_0-z\|\le$$

$$\le 2\sup_{\zeta\in[z,\, z+h]}\frac{1}{n!}\left\|f^{(n+1)}(\zeta)\right\|\cdot\left\|(z-t)^n\right\|\cdot\|z_0-z\|\le\frac{2}{n!}Me^{AR^m}R^{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

при условии $\|z-t\|\le R$ и $\|z-z_0\|\le R$. Отсюда выводим

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k,$$

где ряд сходится равномерно в круге $\|z-z_0\|\le R$. Теорема доказана.

Следствие. *Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано имеет вид*

$$r_n(z)=o\left(\|z-z_0\|^n\right),\ n\to\infty.$$

Определение 5. Функция f h-аналитична в области $D\in\mathbb{C}_h$, если она h-аналитична во всех точках этой области.

Пусть f h-аналитична в точке z_0, следовательно, в окрестности точки z_0 имеем

$$f(z)=c_k(z-z_0)^k+c_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\ldots, \tag{12}$$

где $c_k\ne 0,\ k\ge 0$.

Определение 6. Точка z_0 называется нулем порядка k функции f, если $k\ge 1$ в (12).

Из (12) вытекает представление

$$f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=c_k+c_{k+1}(z-z_0)+\ldots,\ \varphi(z)$ h-аналитична в окрестности точки z_0, $\varphi(z_0)=c_k\ne 0$. В силу непрерывности функции $\varphi(z)$ существует окрестность $U(z_0):\varphi(z)\ne 0\ \forall z\in U(z_0)$. Если c_k не является делителем нуля, то существует окрестность $V(z_0)$ такая, что в этой окрестности $f(z)$ не имеет других нулей, кроме точки z_0. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 8 (теорема единственности для h-аналитических функций). *Пусть f_1 и f_2 h-аналитичны в области $D\subset\mathbb{C}_h$, $f_1(z_k)\equiv f_2(z_k)$, где $z_k\in D$, $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=z_0\in D$, $(1\pm j)(z_k-z_0)\ne 0$, $k=1,\,2,\,\ldots$. Тогда $f_1(z)\equiv f_2(z)$ всюду в D.*

Доказательство. Пусть $f(z)=f_1(z)-f_2(z)$. В некоторой окрестности $U(z_0)$

$$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots.$$

Имеем $f(z_k)=0$, следовательно,

$$f(z_0)=\lim_{k\to\infty}f(z_k)=0,$$

тогда $c_0=0$. Отсюда получаем

$$f(z)=(z-z_0)(c_1+c_2(z-z_0)+\ldots)=(z-z_0)\varphi_1(z),$$

где $\varphi_1(z)=c_1+c_2(z-z_0)+\ldots$.

Теперь

$$f(z_k) = (z_k - z_0)\varphi_1(z_k) = 0,$$

тогда $\varphi_1(z_k) = 0$ и $\varphi_1(z_0) = 0$, значит, $c_1 = 0$, следовательно,

$$\varphi_1(z) = c_2(z - z_0) + c_3(z - z_0)^2 + \ldots = (z - z_0)(c_2 + c_3(z - z_0) + \ldots) = (z - z_0)\varphi_2(z).$$

Поскольку

$$\varphi_1(z) = (z_k - z_0)\varphi_2(z) = 0,$$

то $\varphi_2(z_k) = 0$ и $\varphi_2(z_0) = 0$, а значит, $c_2 = 0$ и т. д., следовательно, $c_n = 0 \; \forall n$. Таким образом, $f(z) \equiv 0$ $\forall z \in U(z_0)$. Пусть $M \subset D$ – множество нулей функции f, $\mathring{M}$ – его внутренность, причем $\mathring{M} \neq \varnothing$. Если $\mathring{M} = D$, то теорема доказана. В случае если $\mathring{M} \subsetneq D$, существует граничная точка d множества $\mathring{M}$, являющаяся внутренней точкой множества D. Также существует последовательность $d_n \in \mathring{M}$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} d_n = d,$$

причем $(1 \pm j)(d_n - d) \neq 0$,

$$f(d) = \lim_{n \to \infty} d_n = 0,$$

следовательно, существует окрестность $V(d)$ такая, что $f(z) \equiv 0 \; \forall z \in V(d)$. Это противоречит тому, что d – граничная точка $\mathring{M}$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Antonuccio F. Semi-complex analysis and mathematical physics [Internet]. 2008 [cited 2021 January 23]. 56 p. Available from: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311032.

2. Розенфельд БА. *Неевклидовы геометрии.* Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1955. 744 с.

3. Ивлев ДД. О двойных числах и их функциях. В: Бронштейн ИН, Лопшиц АМ, Ляпунов АА, Маркушевич АИ, Яглом ИМ, редакторы. *Математика, ее преподавание, приложения и история*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1961. с. 197–203. (Математическое просвещение; выпуск 6).

4. Deckelman S, Robson B. Split-complex numbers and Dirac brackets. *Communications in Information and Systems.* 2014;14(3): 135–159. DOI: 10.4310/CIS.2014.v14.n3.a1.

5. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras.* 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.

6. Зверович ЭИ, Павловский ВА. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от *h*-комплексного переменного. *Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук.* 2020;56(2):189–193. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.

7. Павловский ВА. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце *h*-комплексных чисел. *Весці БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія.* 2020;4:25–31.

8. Зверович ЭИ. *Вещественный и комплексный анализ. Часть 3. Дифференциальное исчисление функций векторного аргумента.* Минск: Вышэйшая школа; 2006. 129 с.

References

1. Antonuccio F. Semi-complex analysis and mathematical physics [Internet]. 2008 [cited 2021 January 23]. 56 p. Available from: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9311032.

2. Rosenfeld BA. *Neevklidovy geometrii* [Non-Euclidean geometries]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1955. 744 p. Russian.

3. Ivlev DD. [On double numbers and their functions]. In: Bronshtein IN, Lopshits AM, Lyapunov AA, Markushevich AI, Yaglom IM, editors. *Matematika, ee prepodavanie, prilozheniya i istoriya* [Mathematics, its teaching, applications and history]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1961. p. 197–203. (Matematicheskoe prosveshchenie; issue 6). Russian.

4. Deckelman S, Robson B. Split-complex numbers and Dirac brackets. *Communications in Information and Systems.* 2014;14(3): 135–159. DOI: 10.4310/CIS.2014.v14.n3.a1.

5. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras.* 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.

6. Zverovich EI, Pavlovsky VA. Finding the areas of convergence and calculating sums of power series from an *h*-complex variable. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2020;56(2):189–193. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.

7. Pavlovsky VA. Algebraic equations with material coefficients in the ring of *h*-complex numbers. *Vesci BDPU. Seryja 3. Fizika. Matjematyka. Infarmatyka. Bijalogija. Geagrafija.* 2020;4:25–31. Russian.

8. Zverovich EI. *Veshchestvennyi i kompleksnyi analiz. Chast' 3. Differentsial'noe ischislenie funktsii vektornogo argumenta* [Real and complex analysis. Part 3. Differential calculus of vector argument functions]. Minsk: Vyshjejshaja shkola; 2006. 129 p. Russian.

Получена 23.03.2021 / исправлена 04.06.2021 / принята 04.06.2021.
Received 23.03.2021 / revised 04.06.2021 / accepted 04.06.2021.