

**СВОБОДНЫЕ ИНТЕРФЕЙСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ
БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ
ГЛАДКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ**

Г.Р. Гулгазарян^а, Л.Г. Гулгазарян^а, И.А. Миклашевич^б, А.А. Плетежов^б, А.А. Хачанян^а

^аАрмянский государственный педагогический университет им Х. Абовяна,

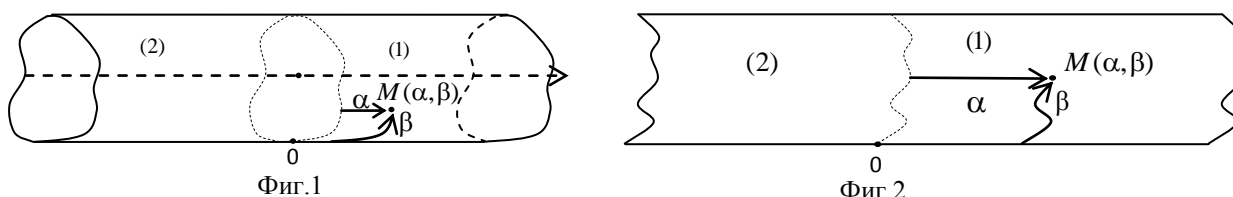
^бБелорусский национальный технический университет

Исследуются свободные интерфейсные колебания бесконечных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек составленных из двух полубесконечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. Исследования проводятся для тонких упругих оболочек, для которых жесткость на изгиб равна нулю (безмоментная оболочка). Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичными задачами для бесконечных составных пластин и пластин-полос. Установлены условия на коэффициенты упругости составных цилиндрических оболочек для существования интерфейсных колебаний. Проведены численные расчеты для оболочек с направляющими в виде замкнутых и незамкнутых эллипсов с различными величинами кривизны. Показано, что с увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты интерфейсных колебаний увеличиваются, а процесс затухания ослабевает.

Введение. Исследования колебательных процессов в составных оболочечных конструкциях занимает важное место в динамике деформируемого твердого тела. Эта обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими вопросами различных отраслей машиностроения, строительства, приборостроения, сейсморазведки и т.д. Во многих случаях объекты исследования представляют собой протяженные тонкостенные составные цилиндрические оболочки с переменными кривизнами. Для тонких оболочек большое значение приобретает изучение собственных колебаний, локализованных у границы раздела свойств материала – интерфейсные колебания. Начало исследования собственных интерфейсных колебаний связаны с работами [1-3], в которых исследуются аналоги волн Стоунли [4,5]. В работе [1] изучаются поперечные колебания, бегущие по линии контакта двух полубесконечных пластин, и сосредоточенных вблизи нее. В работе [2] численно исследованы плоские интерфейсные колебания у границы раздела двух состыкованных полуполос с различными упругими свойствами. В работах [6,7], используя специальный асимптотический метод, изучены собственные интерфейсные колебания составных круговых цилиндрических оболочек [6] и оболочек вращения [7]. Свободные интерфейсные колебания цилиндрических оболочек переменной кривизны ранее не рассматривались. В настоящей работе изучаются собственные интерфейсные колебания безмоментных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек составленных из

полубесконечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. В случае незамкнутой цилиндрической оболочки предполагается, что граничные образующие шарнирно закреплены. Получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот интерфейсных колебаний замкнутых и незамкнутых составных цилиндрических оболочек переменной кривизны. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичной задачей для бесконечной пластинки, составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин с разными упругими свойствами (аналог задачи Стоунли для пластинки) и для бесконечной пластинки-полосы составленной из двух полубесконечных ортотропных пластин-полос с разными упругими свойствами. Полученные дисперсионные уравнения и асимптотические формулы этих дисперсионных уравнений могут служить механизмом для управления спектрами частот поставленных задач [8].

1. Постановка задачи и некоторые математические особенности. Рассматриваются собственные интерфейсные колебания составных ортотропных безмоментных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек переменной кривизны. Выбор систем координат и возможные формы оболочек показаны на фигурах 1,2.



Здесь α – текущая ориентированная длина образующей $-\infty < \alpha < +\infty$, а $\alpha = 0$ соответствует границе раздела свойств материала. β – текущая длина дуги направляющей кривой $0 \leq \beta \leq s$, s – полная длина направляющей кривой. Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой составной цилиндрической оболочки можно представить в виде следующего ряда Фурье:

$$R^{-2} = k^2 \left(\frac{r_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right) \quad 0 \leq \beta \leq s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |r_m| < +\infty \quad (1.1)$$

Здесь $k = 2\pi/s$ для замкнутых цилиндрических оболочек, где s полная длина направляющей кривой, и $k = \pi/s$ для незамкнутых цилиндрических оболочек, где s длина направляющей кривой между шарнирно закрепленными граничными образующими.

Замечание. В зависимости от кривизны направляющей кривой значения k относительно приведенных могут быть кратными.

При $\alpha = 0$ ставятся условия полного контакта. Все величины, относящиеся к правой оболочке ($0 \leq \alpha < +\infty$), отмечаются верхним индексом (1), а к левой оболочке ($-\infty < \alpha \leq 0$) – индексом (2).

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения соответствующие безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек [9].

$$\sum_{j=1}^3 \ell_{ij}^{(r)} u_j^{(r)} = 0 \quad (i = \overline{1,3}, r = 1,2) \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \ell_{11}^{(r)} = -B_{11}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \lambda^{(r)}, \quad \ell_{12}^{(r)} = \ell_{21}^{(r)} = -(B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \ell_{13}^{(r)} = -\ell_{31}^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \ell_{22}^{(r)} = -B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - B_{22}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \lambda^{(r)}, \quad \ell_{23}^{(r)} = B_{22}^{(r)} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial}{R} \right), \quad \ell_{32}^{(r)} = -\frac{B_{22}^{(r)}}{R} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad \ell_{33}^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{R^2} - \lambda^{(r)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$ ($r = 1,2$) – проекции вектора перемещения соответственно в направлениях α, β и нормали к поверхности оболочки: $R^{-1} = R^{-1}(\beta)$ – радиус кривизны направляющей кривой; $\lambda^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2$, где ω – угловая частота собственных интерфейсных колебаний, а $\rho^{(r)}$ ($r = 1,2$) – плотности материалов; $B_{ij}^{(r)}$ ($r = 1,2$) – коэффициенты упругости составляющих полубесконечных оболочек. Граничные условия имеют вид

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=0} = T_1^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad u_1^{(1)}|_{\alpha=0} = u_1^{(2)}|_{\alpha=0}, \quad u_2^{(1)}|_{\alpha=0} = u_2^{(2)}|_{\alpha=0} \quad (1.4)$$

$$u_i^{(r)}(\alpha, \beta) = u_i^{(r)}(\alpha, \beta + s), \quad i = 1,2,3, \quad r = 1,2 \quad (1.5)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u_i^{(1)} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} u_i^{(2)} = 0, \quad i = 1,2,3 \quad (1.6)$$

$$T_2^{(r)}|_{\beta=0,s} = 0, \quad u_1^{(r)}|_{\beta=0,s} = 0, \quad r = 1,2 \quad (1.7)$$

где $T_i^{(r)}, i = 1,2, S_{12}^{(r)}$ являются тангенциальными нормальными и сдвиговыми силами соответственно:

$$\begin{aligned} T_1^{(r)} = hB_{11}^{(r)} \left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \left(\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} - \frac{u_3^{(r)}}{R} \right) \right), \quad T_2^{(r)} = hB_{22}^{(r)} \left(\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} - \frac{u_3^{(r)}}{R} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} \right) \\ S_{12}^{(r)} = hB_{66}^{(r)} \left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \alpha} \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Граничные условия (1.4)-(1.6) соответствуют замкнутой цилиндрической оболочке: соотношения (1.4) выражают условия полного контакта при $\alpha = 0$, (1.5) – условия периодичности колебаний (фиг. 1). Граничные условия (1.4), (1.7) соответствуют незамкнутой цилиндрической оболочке: соотношения (1.7) являются условиями шарнирного закрепления по образующим $\beta = 0$ и $\beta = s$ (фиг. 2). Условия (1.6) являются условиями затухания при $|\alpha| \rightarrow +\infty$.

Заметим, что любые граничные задачи, порожденные системой уравнений (1.2) (с фиксированным индексом (r)) имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $0 \leq \lambda^{(r)} \leq \lambda_0^{(r)}$ – множеством значений функции [10]

$$\Omega^{(r)}(\beta, \theta^{(r)}) = \frac{B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta^{(r)}}{B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}\sin^4\theta^{(r)} + B_{22}^{(r)}\cos^4\theta^{(r)}) + (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)})\cos^2\theta^{(r)}\sin^2\theta^{(r)}} \quad (1.9)$$

$$0 \leq \beta \leq s, \quad 0 \leq \theta^{(r)} \leq 2\pi, \quad r=1,2$$

Отметим, что появление этих участков непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.2) по Дуглису-Ниренбергу и не связано с граничными условиями ([11], стр. 97). Остановимся на его содержании [12-13].

Пусть ℓ_{ij}^{0r} – старший по порядку дифференцирования членов в каждом $\ell_{ij}^{(r)}$ из (1.3).

Введем матрицу операторов

$$L^{0r}\left(\beta, \frac{\partial}{\partial\alpha}, \frac{\partial}{\partial\beta}\right) = \|\ell_{ij}^{0r}\|_{i,j=1}^3 \quad (1.10)$$

и пусть $L^r(\beta, (-1)^r i\xi_1^{(r)}, (-1)^r i\xi_2^{(r)})$ – соответствующая матрица (символ), получающаяся из (1.10) формальной заменой $\partial/\partial\alpha \rightarrow (-1)^r i\xi_1^{(r)}$, $\partial/\partial\beta \rightarrow (-1)^r i\xi_2^{(r)}$.

Системы (1.2) называются эллиптическими по Дуглису-Ниренбергу, если существуют такие целые числа $s_i^{(r)}$ и $t_j^{(r)}$, что порядок каждого оператора ℓ_{ij}^{0r} строго равен $s_i^{(r)} + t_j^{(r)}$, $1 \leq i, j \leq 3$ и

$$\Delta_{\lambda^{(r)}} = \text{Det}L^{0r}(\beta, (-1)^r i\xi_1^{(r)}, (-1)^r i\xi_2^{(r)}) \neq 0 \quad (1.11)$$

при $0 \leq \beta \leq s$, $-\infty < \alpha \leq 0$, $r=2$; $0 \leq \alpha < +\infty$, $r=1$ и всех вещественных $\xi_1^{(r)}$ и $\xi_2^{(r)}$ таких, что $(\xi_1^{(r)})^2 + (\xi_2^{(r)})^2 \neq 0$. Заметим, что

$$\text{Det}L^{0r}(\beta, (-1)^r i\xi_1^{(r)}, (-1)^r i\xi_2^{(r)}) = \begin{vmatrix} B_{11}^{(r)}(\xi_1^{(r)})^2 + B_{66}^{(r)}(\xi_2^{(r)})^2 & (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})\xi_1^{(r)}\xi_2^{(r)} & (-1)^r i\xi_1^{(r)} \frac{B_{12}^{(r)}}{R} \\ (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)})\xi_1^{(r)}\xi_2^{(r)} & B_{66}^{(r)}(\xi_1^{(r)})^2 + B_{22}^{(r)}(\xi_2^{(r)})^2 & (-1)^r i\xi_2^{(r)} \frac{B_{22}^{(r)}}{R} \\ (-1)^{r+1} i\xi_1^{(r)} \frac{B_{12}^{(r)}}{R} & (-1)^{r+1} i\xi_2^{(r)} \frac{B_{22}^{(r)}}{R} & \frac{B_{22}^{(r)}}{R^2} - \lambda^{(r)} \end{vmatrix} \quad (1.12)$$

что соответствует выборам индексов

$$s_1^{(r)} = s_2^{(r)} = t_1^{(r)} = t_2^{(r)} = 1, \quad s_3^{(r)} = t_3^{(r)} = 0 \quad (1.13)$$

Можно проверить, что

$$\Delta_{\lambda^{(r)}} = \text{Det}L^{0r}(\beta, (-1)^r i\xi_1^{(r)}, (-1)^r i\xi_2^{(r)}) = B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta)(\xi_1^{(r)})^4 - \lambda^{(r)}[B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}(\xi_1^{(r)})^4 + B_{22}^{(r)}(\xi_2^{(r)})^4) + (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)})(\xi_1^{(r)})^2(\xi_2^{(r)})^2] \quad (1.14)$$

При условии $\lambda^{(r)} \in [0, \lambda_0^{(r)}]$ (см. (1.9)) для некоторых $\beta_0^{(r)} \in [0, s]$ и $\xi_{01}^{(r)}, \xi_{02}^{(r)}$ параметров $\Delta_{\lambda^{(r)}} = 0$, т.е. нарушаются условия эллиптичности систем (1.2) по Дуглису-Ниренбергу. Действительно, если подставить

$$\beta = \beta_0^{(r)}, \quad \sin\theta^{(r)} = \xi_{01}^{(r)} / \sqrt{(\xi_{01}^{(r)})^2 + (\xi_{02}^{(r)})^2}, \quad \cos\theta^{(r)} = \xi_{02}^{(r)} / \sqrt{(\xi_{01}^{(r)})^2 + (\xi_{02}^{(r)})^2} \quad (1.15)$$

приравнять нулю (1.14) и решить относительно $\lambda^{(r)}$ полученное уравнение, то будем иметь соответствующие значения функции (1.9).

Как известно, эллиптичности системы не достаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставлена даже в случае однородных систем [13-15]. Для существования нетривиальных решений задачи (1.2), (1.4)-(1.6) и (1.2), (1.4), (1.6), (1.7) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы разделения материалов некоторые

условия алгебраического характера. Это условие называется условием дополнителности (условием Шапиро-Лопатинского) [11,13-15].

Поясним это условие для задач (1.2), (1.4)-(1.6) и (1.2), (1.4), (1.6), (1.7). Предположим, что $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$, $r=1,2$ и возьмем произвольную точку $(0, \beta)$. Заморозим все коэффициенты (1.10) в точке $(0, \beta)$ и формально заменим $\partial/\partial\beta \rightarrow (-1)^r i \xi_2$, а дифференцирование по α сохраним. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$L_0^{(r)}(\beta, \partial/\partial\alpha, (-1)^r i \xi_2) g^{(r)}(\alpha) = 0 \quad (1.16)$$

$$L_0^{(r)}(\beta, \partial/\partial\alpha, (-1)^r i \xi_2) = \begin{vmatrix} -B_{11}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_{66}^{(r)} \xi_2^2 & (-1)^{r+1} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \xi_2 \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{B_{12}^{(r)}}{R(\beta)} \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ (-1)^{r+1} (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \xi_2 \frac{\partial}{\partial\alpha} & -B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_{22}^{(r)} \xi_2^2 & (-1)^r i \frac{B_{22}^{(r)}}{R(\beta)} \xi_2 \\ -\frac{B_{12}^{(r)}}{R(\beta)} \frac{\partial}{\partial\alpha} & (-1)^{r+1} i \frac{B_{22}^{(r)}}{R(\beta)} \xi_2 & \frac{B_{22}^{(r)}}{R^2(\beta)} - \lambda^{(r)} \end{vmatrix} \quad (1.17)$$

Решение системы (1.16) ищем в виде

$$g^{(r)}(\alpha) = [u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}]^T = d^{(r)} \exp((-1)^r i \xi_1^{(r)} \alpha) \quad (1.18)$$

где $d^{(r)} = [d_1^{(r)}, d_2^{(r)}, R(\beta)]^T$ – постоянный вектор (условие $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$ исключает равенство $R^{-1}(\beta) = 0$), $\xi_1^{(r)}$ – характеристический показатель. При определении $\xi_1^{(r)}$, очевидно, придем к уравнениям

$$\text{Det} L^{0r}(\beta, (-1)^r i \xi_1^{(r)}, (-1)^r i \xi_2) = 0, \quad r=1,2. \quad (1.19)$$

Поскольку считаем, что выполнено условие (1.11), то уравнения (1.19) при фиксированном вещественном $\xi_2 \neq 0$ не имеет вещественных корней $\xi_1^{(r)}$. Так как (1.19) относительно $\xi_1^{(r)}$ являются биквадратными уравнениями с действительными коэффициентами, то при всех вещественных $\xi_2 \neq 0$ каждое имеет два корня $\xi_1^{(r)}$ в верхней полуплоскости и два в нижней, причем все они разные. Устойчивые решения системы (1.16) вида (1.18) соответствуют корням $\xi_{1j}^{(r)}$ ($j=1,2, r=1,2$) уравнения (1.19) с $\text{Im} \xi_{1j}^{(r)} < 0$. Пусть

$$\xi_{1j}^{(r)} = -i \gamma_j^{(r)} | \xi_2 | \quad j=1,2, \quad r=1,2 \quad (1.20)$$

где $\gamma_1^{(r)}$ и $\gamma_2^{(r)}$ корни уравнения

$$\left(\lambda^{(r)} - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)}} R^{-2}(\beta) \right) (\gamma^{(r)})^4 - \lambda^{(r)} \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (\gamma^{(r)})^2 + \lambda^{(r)} \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} = 0 \quad (1.21)$$

с положительными действительными частями.

Пусть $g_j^{(r)}(\alpha)$ ($j=1,2; r=1,2$) являются решениями уравнения (1.16) вида (1.18) при

$\xi_1^{(r)} = \xi_{1j}^{(r)}$. Непосредственным вычислением получим

$$d_{1j}^{(r)} = \frac{(-1)^r i \frac{\gamma_j^{(r)}}{|\xi_2|} \left(\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\gamma_j^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right)}{(\gamma_j^{(r)})^4 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (\gamma_j^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}}$$

$$d_{2j}^{(r)} = \frac{(-1)^r i \left((B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}) (\gamma_j^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \right)}{(\gamma_j^{(r)})^4 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (\gamma_j^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}} \quad (j = 1, 2) \quad (1.22)$$

Обозначим

$$g^{(r)}(\beta) = w_1^{(r)} g_1^{(r)}(\beta) + w_2^{(r)} g_2^{(r)}(\beta) \quad (1.23)$$

и подставим в граничные условия (главные части граничных условий (1.4), где формально произведена замена $\partial/\partial\beta \rightarrow (-1)^r i \xi_2$, а коэффициенты заморожены в точке $(0, \beta)$):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial \alpha} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \left(i \xi_2 u_2^{(1)} + \frac{u_3^{(1)}}{R(\beta)} \right) \right|_{\alpha=0} &= \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left(\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \left(i \xi_2 u_2^{(2)} - \frac{u_3^{(2)}}{R(\beta)} \right) \right) \Big|_{\alpha=0} \\ - i \xi_2 u_1^{(1)} + \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \left(i \xi_2 u_1^{(2)} + \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$u_1^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_1^{(2)} \Big|_{\alpha=0}, \quad u_2^{(1)} \Big|_{\alpha=0} = u_2^{(2)} \Big|_{\alpha=0}$$

Условие Шапиро-Лопатинского состоит в том, чтобы краевая задача (1.16), (1.24) имела только тривиальное решение. Последнее высказывание эквивалентно тому, что система уравнение

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^2 \left(i \xi_{1j}^{(1)} d_{1j}^{(1)} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (\xi_2 d_{2j}^{(1)} + 1) \right) w_j^{(1)} &= \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 \left(i \xi_{1j}^{(2)} d_{1j}^{(2)} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (i \xi_2 d_{2j}^{(2)} - 1) \right) w_j^{(2)} \\ - i \sum_{j=1}^2 (\xi_2 d_{1j}^{(1)} + \xi_{1j}^{(1)} d_{2j}^{(1)}) w_j^{(1)} &= i \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 (\xi_2 d_{1j}^{(2)} + \xi_{1j}^{(2)} d_{2j}^{(2)}) w_j^{(2)} \\ \sum_{j=1}^2 d_{kj}^{(1)} w_j^{(1)} &= \sum_{j=1}^2 d_{kj}^{(2)} w_j^{(2)} \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (1.25)$$

должна иметь только тривиальное решение, т.е. определитель системы (1.25) не равен нулю.

Заметим, что система (1.25) преобразуется к эквивалентной системе

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \frac{S_{1j}^{(1)}}{D_j^{(1)}} w_j^{(1)} &= \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 \frac{S_{1j}^{(2)}}{D_j^{(2)}} w_j^{(2)}, \quad \sum_{j=1}^2 \frac{S_{2j}^{(1)}}{D_j^{(1)}} w_j^{(1)} = \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 \frac{S_{2j}^{(2)}}{D_j^{(2)}} w_j^{(2)} \\ \sum_{j=1}^2 \frac{S_{kj}^{(1)}}{D_j^{(1)}} w_j^{(1)} &= - \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 \frac{S_{kj}^{(2)}}{D_j^{(2)}} w_j^{(2)}, \quad k = 3, 4 \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} S_{1j}^{(r)} &= \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2} (\gamma_j^{(r)})^2, \quad S_{2j}^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (\gamma_j^{(r)})^3 \\ S_{3j}^{(r)} &= \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\gamma_j^{(r)})^3 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \gamma_j^{(r)}, \quad S_{4j}^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (\gamma_j^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \\ D_j^{(r)} &= (\gamma_j^{(r)})^4 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (\gamma_j^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Следовательно, чтобы система (1.26) имела только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \text{Det} \begin{vmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} & -B_{11}^{(2)}/B_{11}^{(1)}S_{11}^{(2)} & -B_{11}^{(2)}/B_{11}^{(1)}S_{12}^{(2)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} & -B_{66}^{(2)}/B_{66}^{(1)}S_{21}^{(2)} & -B_{11}^{(2)}/B_{11}^{(1)}S_{22}^{(2)} \\ S_{31}^{(1)} & S_{32}^{(1)} & S_{31}^{(2)} & S_{32}^{(2)} \\ S_{41}^{(1)} & S_{42}^{(1)} & S_{41}^{(2)} & S_{42}^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1.28)$$

Легко заметить, что

$$\Delta(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \frac{B_{22}^{(1)}B_{22}^{(2)}(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2)(B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2)}{(B_{11}^{(1)})^3(B_{11}^{(2)})^2 B_{66}^{(1)}} (\gamma_2^{(1)} - \gamma_1^{(1)})(\gamma_2^{(2)} - \gamma_1^{(2)}) \Omega(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \quad (1.29)$$

$$\Omega(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = \frac{1}{S^{(1)}(\beta, \lambda^{(1)})S^{(2)}(\beta, \lambda^{(2)})} \left\{ \frac{B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2}{B_{66}^{(2)}} \lambda^{(1)} Q^{(2)}(\beta, \lambda^{(2)}) + \frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2}{B_{66}^{(1)}} \lambda^{(2)} Q^{(1)}(\beta, \lambda^{(1)}) \right\} + \quad (1.30)$$

$$(\gamma_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)})(\gamma_1^{(2)} + \gamma_2^{(2)})(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)} + \gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}) - 2 \left(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)} - \frac{\lambda^{(1)}B_{12}^{(1)}}{S^{(1)}(\beta, \lambda^{(1)})} \right) \left(\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)} - \frac{\lambda^{(2)}B_{12}^{(2)}}{S^{(2)}(\beta, \lambda^{(2)})} \right)$$

$$Q^{(r)}(\beta, \lambda^{(r)}) = B_{66}^{(r)}(\lambda^{(r)} - B_{22}^{(r)}R^{-2}(\beta)) + \sqrt{B_{22}^{(r)}\lambda^{(r)}(B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)} - (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2))R^{-2}(\beta)}$$

$$S^{(r)}(\beta, \lambda^{(r)}) = B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)} - (B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta).$$

Заметим, что для незамкнутой цилиндрической оболочки при граничных условиях (1.7), условие Шапиро-Лопатинского выполнено. Этот факт доказывается аналогично как в [10]. Следовательно, условие Шапиро-Лопатинского для задач (1.2), (1.4)-(1.6) и (1.2), (1.4), (1.6), (1.7) имеет вид

$$\Omega(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) \neq 0, \quad 0 \leq \beta \leq s \quad (1.31)$$

Множество значений ω^2 при которых $\Omega(\beta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}) = 0$, обозначим через Ω_γ .

Справедливо следующее утверждение: *вне множества $[0, \lambda_0^{(1)}/\rho^{(1)}] \cup [0, \lambda_0^{(2)}/\rho^{(2)}] \cup \Omega_\gamma$ спектр частот задач (1.2), (1.4)-(1.6) и (1.2), (1.4), (1.6), (1.7) состоит из изолированных собственных частот конечной кратности [11].*

2. Вывод и анализ дисперсионных уравнений. Для последующих вычислений целесообразно систему уравнений (1.2) свести к системе уравнений

$$\Gamma^{(r)}u_1^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\partial^3 w^{(r)}}{\partial \alpha^3} - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\partial^3 w^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\lambda^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \alpha}$$

$$\Gamma^{(r)}u_2^{(r)} = \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\partial^3 w^{(r)}}{\partial \beta^3} + \frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}} \frac{\partial^3 w^{(r)}}{\partial \alpha^2 \partial \beta} + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\lambda^{(r)}}{B_{66}^{(r)}} \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \beta} \quad (2.1)$$

$$-\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{w^{(r)}}{R^2} = \frac{\lambda^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} w^{(r)}, \quad r=1,2$$

где $w^{(r)} = u_3^{(r)}/R$, а операторы $\Gamma^{(r)}$ ($r=1,2$) имеют вид

$$\Gamma^{(r)} = \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} +$$

$$+ \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \lambda^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{22}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \lambda^{(r)} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{(\lambda^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \quad (2.2)$$

Решение системы (2.1) ищем в виде

$$u_1^{(r)} = \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} u_m^{(r)} \sin km\beta \right), \quad u_2^{(r)} = \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} v_m^{(r)} \cos km\beta \right) \quad (2.3)$$

$$w^{(r)} = k \exp((-1)^r \chi^{(r)} k \alpha) \left(\sum_{m=1}^{\infty} w_m^{(r)} \sin km\beta \right)$$

При этом условия (1.5) и (1.7) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, если параметру k придавать разные значения. Подставим выражения (2.3) в систему (2.1). Из первых двух уравнений (2.1), приравнявая соответствующие коэффициенты полученных тригонометрических рядов, получим

$$C_m^{(r)} u_m^{(r)} = (-1)^r \chi^{(r)} a_m^{(r)} w_m^{(r)}, \quad C_m^{(r)} v_m^{(r)} = m b_m^{(r)} w_m^{(r)}$$

$$a_m^{(r)} = \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2, \quad (\eta^{(r)})^2 = \frac{\lambda^{(r)}}{k^2 B_{66}^{(r)}} \quad (2.4)$$

$$b_m^{(r)} = \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (\chi^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (m^2 - (\eta^{(r)})^2)$$

$$C_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} m^2 (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 (\chi^{(r)})^2 +$$

$$+ (m^2 - (\eta^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 \right), \quad m = \overline{1, +\infty}$$

Из третьего уравнения системы (2.1), учитывая соотношения (2.4) и правило умножения тригонометрических рядов ([16], стр. 592), придем к бесконечной системе уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-m} - r_{n+m}) A_n^{(r)} w_n^{(r)} - 2 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 w_m^{(r)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad r = 1, 2 \quad (2.5)$$

$$A_n^{(r)} = P_n^{(r)} / C_n^{(r)}, \quad P_n^{(r)} = C_n^{(r)} + n^2 b_n^{(r)} - B_{12}^{(r)} / B_{22}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 a_n^{(r)}, \quad n = \overline{1, +\infty} \quad (2.6)$$

Исходя из правила умножения тригонометрических рядов, условимся, что если $h > 0$, то $r_{-h} = r_h$, так как в области определения $A_n^{(r)}$ имеем $A_n^{(r)} = O(1/n^2)$, следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(r)}| < +\infty. \text{ Учитывая также представление (1.1), получим}$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} |A_n^{(r)}| (|r_{n+m}| + |r_{n-m}|) \leq 3(|r_0|/2 + \sum_{m=1}^{\infty} |r_m|) (\sum_{n=1}^{\infty} |A_n^{(r)}|) < +\infty \quad (2.7)$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (2.5) при $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$, $r=1,2$ и в области определения коэффициентов (2.6) относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям [17]. Чтобы системы (2.5) имели нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы их определители равнялись нулю

$$D^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1, \dots, r_m, \dots) = 0, \quad r=1,2 \quad (2.8)$$

Предположим, что $\chi_1^{(r)}, \chi_2^{(r)}$ ($r=1,2$) – различные корни уравнения (2.8) с положительными действительными частями. Учитывая условие (1.6), решения задач (1.2), (1.4)-(1.6) и (1.2), (1.4), (1.6), (1.7) ищем в виде

$$u_1^{(r)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k \alpha) u_{mj}^{(r)} \sin km\beta, \quad u_2^{(r)} = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k \alpha) v_{mj}^{(r)} \cos km\beta \quad (2.9)$$

$$w^{(r)} = k \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k \alpha) w_{mj}^{(r)} \sin km\beta$$

Здесь $u_{mj}^{(r)}, v_{mj}^{(r)}$ значения $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$ при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$, а $(w_{1j}^{(r)}, w_{2j}^{(r)}, \dots, w_{mj}^{(r)}, \dots)$ $j=1,2$ решения системы (2.5) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ $J=1,2$ соответственно. Учитывая граничные условия (1.4) и соотношения (2.4) приходим к совокупности систем уравнений

$$\sum_{j=1}^2 \frac{R_{1j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 \frac{R_{1j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^2 \frac{R_{2j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 \frac{R_{2j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0 \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=1}^2 \frac{R_{3j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} + \sum_{j=1}^2 \frac{R_{3j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^2 \frac{R_{4j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} - \sum_{j=1}^2 \frac{R_{4j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

$$R_{1j}^{(r)} = (\chi_j^{(r)})^2 a_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 b_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} c_{mj}^{(r)} \quad (2.11)$$

$$R_{2j}^{(r)} = \chi_j^{(r)} (a_{mj}^{(r)} + b_{mj}^{(r)}), \quad R_{3j}^{(r)} = \chi_j^{(r)} a_{mj}^{(r)}, \quad R_{4j}^{(r)} = b_{mj}^{(r)}$$

а $a_{mj}^{(r)}, b_{mj}^{(r)}, c_{mj}^{(r)}$ – значения $a_m^{(r)}, b_m^{(r)}, c_m^{(r)}$ из (2.4) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ соответственно. Чтобы совокупность систем уравнений (2.10) имела решение, достаточно чтобы совокупность уравнений

$$\Delta_m = \text{Det} \begin{vmatrix} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} & -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)} & -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} R_{12}^{(2)} \\ R_{21}^{(1)} & R_{22}^{(1)} & B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} R_{21}^{(2)} & B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} R_{22}^{(2)} \\ R_{31}^{(1)} & R_{32}^{(1)} & R_{31}^{(2)} & R_{32}^{(2)} \\ R_{41}^{(1)} & R_{42}^{(1)} & -R_{41}^{(2)} & -R_{42}^{(2)} \end{vmatrix} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.12)$$

вне множества $[0, \lambda^{(1)} / \rho^{(1)}] \cup [0, \lambda^{(2)} / \rho^{(2)}] \cup \Omega_\gamma$ имела ω^2 – решение. Численный анализ показывает, что левая часть этого равенства становится малой, когда любые два корня уравнения (2.8) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может

привести к появлению ложных решений. Оказывается, множитель в левой части равенства (2.12), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить.

Выполняя элементарные действия над столбцами определителя из (2.12), получим

$$\Delta_m = m^{12}(x_2^{(1)} - x_1^{(1)})(x_2^{(2)} - x_1^{(2)}) \begin{vmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} & -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} m_{11}^{(2)} & -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} m_{12}^{(2)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} & B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} m_{21}^{(2)} & B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} m_{22}^{(2)} \\ m_{31}^{(1)} & m_{32}^{(1)} & m_{31}^{(2)} & m_{32}^{(2)} \\ m_{41}^{(1)} & m_{42}^{(1)} & -m_{41}^{(2)} & -m_{42}^{(2)} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} m_{11}^{(r)} &= \left(\frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2} - \frac{B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} (\eta_m^{(r)})^2 \right) (x_1^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} (\eta_m^{(r)})^2 (1 - (\eta_m^{(r)})^2), \quad \eta_m^{(r)} = \frac{\eta^{(r)}}{m} \\ m_{12}^{(r)} &= \left(\frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2} - \frac{B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{(B_{11}^{(r)})^2} (\eta_m^{(r)})^2 \right) (x_1^{(r)} + x_2^{(r)}), \quad x_i^{(r)} = \frac{\chi_i^{(r)}}{m}, \quad i=1,2 \\ m_{21}^{(r)} &= \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2} (x_1^{(r)})^3 + \frac{B_{12}^{(r)} + B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 x_1^{(r)} \\ m_{22}^{(r)} &= \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2} ((x_1^{(r)})^2 + (x_2^{(r)})^2 + x_1^{(r)} x_2^{(r)}) + \frac{B_{12}^{(r)} + B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \\ m_{31}^{(r)} &= \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (x_1^{(r)})^3 + \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) x_1^{(r)} \\ m_{32}^{(r)} &= \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} ((x_1^{(r)})^2 + (x_2^{(r)})^2 + x_1^{(r)} x_2^{(r)}) + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \\ m_{41}^{(r)} &= \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (x_1^{(r)})^2 - \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \\ m_{42}^{(r)} &= \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (x_1^{(r)} + x_2^{(r)}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Уравнения (2.12) эквивалентны уравнениям

$$d_m = Det \begin{vmatrix} m_{11}^{(1)} & m_{12}^{(1)} & -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} m_{11}^{(2)} & -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} m_{12}^{(2)} \\ m_{21}^{(1)} & m_{22}^{(1)} & B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} m_{21}^{(2)} & B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} m_{22}^{(2)} \\ m_{31}^{(1)} & m_{32}^{(1)} & m_{31}^{(2)} & m_{32}^{(2)} \\ m_{41}^{(1)} & m_{42}^{(1)} & -m_{41}^{(2)} & -m_{42}^{(2)} \end{vmatrix} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (2.15)$$

Уравнения (2.15) при $k = 2\pi/s$, $m \in N$ – дисперсионные уравнения задачи (1.2), (1.4)-(1.6), при $k = \pi/s$, $m \in N$ – дисперсионные уравнения задачи (1.2), (1.4), (1.6), (1.7).

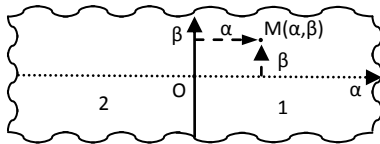
В общем случае решение уравнения (2.8) представляет собой сложную задачу. Поэтому, для установления асимптотических формул для дисперсионных уравнений (2.15) рассмотрим следующие частные случаи.

3. Частные случаи. *Случай а):* $R^{-2}(\beta) \equiv 0$ ($r_m = 0, m = \overline{0, +\infty}$). В выражениях (1.2)-(1.8)

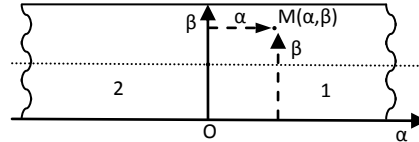
всюду формально положим $R^{-1}(\beta) \equiv 0$, в итоге, получим систему уравнений малых планарных колебаний ортотропных пластин [18]

$$\begin{aligned} -B_{11}^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \alpha^2} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \beta^2} - (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} &= \lambda^{(r)} u_1^{(r)} \\ - (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) \frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \alpha^2} - B_{22}^{(r)} \frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial \beta^2} &= \lambda^{(r)} u_2^{(r)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

в которых $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}$ ($r=1,2$) – тангенциальные компоненты перемещений точки срединной плоскости. $B_{ik}^{(r)}$ ($r=1,2$) коэффициенты упругости пластин. $\lambda^{(r)} = \rho^{(r)} \omega^2$, где ω – угловая частота собственных интерфейсных колебаний. $\rho^{(r)}$ ($r=1,2$) – плотности материалов. Все величины относящиеся к правой пластинке ($0 \leq \alpha < +\infty$) отмечаются верхним индексом (1), к левой пластинке ($-\infty < \alpha \leq 0$) – индексом (2).



Фиг.3



Фиг.4

Исследуется вопрос существования планарных интерфейсных колебаний бесконечной составной пластинки и бесконечной составной пластины-полосы (фиг. 3,4).

Предполагается, что α ($-\infty < \alpha < +\infty$) и β ($-\infty < \beta < \infty$) являются прямолинейными ортогональными координатами точки срединной плоскости бесконечной пластинки (фиг. 3), а α ($-\infty < \alpha < +\infty$), β ($-0 \leq \beta \leq s$) – пластинки-полосы (фиг. 4). На линии раздела свойств материала ($\alpha = 0$) имеет место полный контакт.

В случае пластин-полос предполагается, что края шарнирно закреплены. Граничные условия принимают вид

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=0} = T_1^{(2)}|_{\alpha=0}, S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0} = S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0}, u_1^{(1)}|_{\alpha=0} = u_1^{(2)}|_{\alpha=0}, u_2^{(1)}|_{\alpha=0} = u_2^{(2)}|_{\alpha=0} \quad (3.2)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} u_j^{(1)} = 0, \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} u_j^{(2)} = 0, j = 1, 2 \quad (3.3)$$

$$u_i(\alpha, \beta) = u_i(\alpha, \beta + s) \quad (3.4)$$

$$T_2^{(r)}|_{\beta=0,s} = 0, u_1^{(r)}|_{\beta=0,s} = 0, r = 1, 2 \quad (3.5)$$

$$T_1^{(r)} = hB_{11}^{(r)} \left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} \right), T_2^{(r)} = hB_{22}^{(r)} \left(\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} \frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \alpha} \right) \quad (3.6)$$

$$S_{12}^{(r)} = hB_{66}^{(r)} \left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial \beta} + \frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial \alpha} \right)$$

Граничные условия (3.2)-(3.4) соответствуют бесконечной пластинке: соотношения (3.2) выражают условия полного контакта при $\alpha = 0$, (3.4) – условия периодичности колебаний, где s любое положительное число. Граничные условия (3.2), (3.3), (3.5) соответствуют пластине-полосе: соотношения (3.5) являются условиями шарнирного закрепления по краям $\beta = 0, \beta = s$. Условия (3.3) – условия затухания при $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Решение системы (3.1) ищем в виде

$$u_1^{(r)} = u_m^{(r)} \sin km\beta \exp((-1)^r y^{(r)} km\alpha), u_2^{(r)} = v_m^{(r)} \cos km\beta \exp((-1)^r y^{(r)} km\alpha) \quad (3.7)$$

где $k = n_0 2\pi/s$, $n_0 \in N$ для бесконечной пластинки и $k = \pi/s$ для пластинки-полосы.

При этом условия (3.4) и (3.5) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, если придавать параметру k разные значения. Подставляя выражения (3.7) в систему (3.1), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \left(B_{11}^{(r)} (y^{(r)})^2 - B_{66}^{(r)} + \frac{\lambda^{(r)}}{m^2 k^2} \right) u_m^{(r)} - (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) (-1)^r y^{(r)} v_m^{(r)} &= 0 \\ (B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}) (-1)^r y^{(r)} u_m^{(r)} + \left(B_{66}^{(r)} (y^{(r)})^2 - B_{22}^{(r)} + \frac{\lambda^{(r)}}{m^2 k^2} \right) v_m^{(r)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Приравняв определитель системы (3.8) к нулю, получим характеристические уравнения

$$\begin{aligned} c_m^{(r)} = (y^{(r)})^4 - \frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} (y^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 (y^{(r)})^2 + \\ + (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$(\eta^{(r)})^2 = \frac{\lambda^{(r)}}{k^2 B_{66}^{(r)}}, \quad \eta_m^{(r)} = \frac{\eta^{(r)}}{m}, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.10)$$

Пусть $y_j^{(r)}$, $j = 1, 2$ различные корни уравнения (3.9) с положительными действительными частями, тогда в качестве решения системы уравнений (3.8) можно принять

$$u_{mj}^{(r)} = (-1)^r y_j^{(r)} \frac{B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}, \quad v_{mj}^{(r)} = (y_j^{(r)})^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \quad (3.11)$$

Решения задач (3.1)-(3.4) и (3.1)-(3.3), (3.5) ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1^{(r)} &= \sum_{j=1}^2 u_{mj}^{(r)} w_j^{(r)} \exp((-1)^r y_j^{(r)} km\alpha) \sin km\beta \\ u_2^{(r)} &= \sum_{j=1}^2 v_{mj}^{(r)} w_j^{(r)} \exp((-1)^r y_j^{(r)} km\alpha) \cos km\beta \end{aligned} \quad (3.12)$$

Учитывая граничные условия (3.2), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^2 P_{1j}^{(1)} w_j^{(1)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 P_{1j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^2 P_{2j}^{(1)} w_j^{(1)} + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^2 P_{2j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0 \quad (3.13)$$

$$\sum_{j=1}^2 P_{3j}^{(1)} w_j^{(1)} + \sum_{j=1}^2 P_{3j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^2 P_{4j}^{(1)} w_j^{(1)} - \sum_{j=1}^2 P_{4j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0$$

$$P_{1j}^{(r)} = \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} ((y_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2)), \quad P_{2j}^{(r)} = y_j^{(r)} ((y_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta_m^{(r)})^2) \quad (3.14)$$

$$P_{3j}^{(r)} = y_j^{(r)} \frac{B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}, \quad P_{4j}^{(r)} = (y_j^{(r)})^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2)$$

Приравняв определитель системы (3.13) к нулю, получим дисперсионные уравнения

$$\Delta_m^* = (y_2^{(1)} - y_1^{(1)})(y_2^{(2)} - y_1^{(2)}) \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.15)$$

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) +$$

$$+ \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \left[2 \left(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (1 - (\eta_m^{(1)})^2) \right) \left(y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (1 - (\eta_m^{(2)})^2) \right) \right] +$$

$$+ (y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)}) \left((1 - (\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + (1 - (\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)} \right) \quad (3.16)$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (1 - (\eta_m^{(r)})^2)$$

$$K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (1 - (\eta_m^{(r)})^2) \left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2 \right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)},$$

Дисперсионные уравнения (3.15) эквивалентны уравнениям

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.17)$$

Уравнения (3.17) являются аналогом дисперсионного уравнения Стоунли для составных ортотропных бесконечных пластин ($k = n_0 2\pi/s$, $n_0 \in N$) или составных ортотропных бесконечных пластин-полос ($k = \pi/s$) [19]. Заметим, что в дисперсионных уравнениях (2.15), (3.17), коэффициенты упругости левых и правых оболочек и пластин, и соответствующие корни характеристических уравнений (2.8), (3.9) входят симметричным образом. Поэтому, например, если левая пластинка (с верхним индексом (2)) более мягкая (т.е. $\rho^{(2)}/\rho^{(1)} \ll 1$, $B_{ij}^{(2)}/B_{ij}^{(1)} \ll 1$, $i, j = 1, 2, 6$) чем правая, то дисперсионные уравнения (3.17) принимают вид

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \{K_2(\eta_m^{(1)}) + O(B_{66}^{(2)}/B_{66}^{(1)}) + O(\rho^{(2)}/\rho^{(1)})\} = 0 \quad (3.18)$$

Следовательно, существование интерфейсных колебаний составной пластинки зависит от существования краевого колебания правой полубесконечной пластинки со свободным краем [10], [20]: т.е. заведомо существуют интерфейсные колебания.

Если $B_{ij}^{(2)} / B_{ij}^{(1)} \approx 1, ij = 1,2,6; \rho^{(2)} / \rho^{(1)} \approx 1$, то мало шанса для существования интерфейсных колебаний.

Случай б): $R^{-2} = k^2 r_0 / 2 (r_m = 0, m = \overline{1,+\infty})$, т.е. имеем безмоментные упругие ортотропные круговые замкнутые и незамкнутые продольно-неоднородные бесконечные цилиндрические оболочки. В этом случае система (2.5) примет вид

$$(r_0 A_m^{(r)} - 2 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2) w_m^{(r)} = 0, m = \overline{1,+\infty}, r = 1,2 \quad (3.19)$$

Следовательно уравнения (2.8) распадаются на две совокупности уравнений

$$r_0 P_m^{(r)} - 2 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} C_m^{(r)} (\eta^{(r)})^2 = 0, m = \overline{1,+\infty}, r = 1,2 \quad (3.20)$$

или уравнений

$$\begin{aligned} & \left((\eta^{(r)})^2 - \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \frac{r_0}{2} \right) (\chi^{(r)})^4 - (\eta^{(r)})^2 \left(\frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2 B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} m^2 - \right. \\ & \left. - \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 + B_{22}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} \frac{r_0}{2} \right) (\chi^{(r)})^2 + \\ & + (\eta^{(r)})^2 (m^2 - (\eta^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} \frac{r_0}{2} \right) = 0, m = \overline{1,+\infty}, r = 1,2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

В этом случае, для нахождения безразмерных характеристик собственных частот $\eta^{(r)}$ ($r = 1,2$) в дисперсионных уравнениях (2.15) используются $x_1^{(r)} = \chi_1^{(r)} / m, x_2^{(r)} = \chi_2^{(r)} / m$ выражения, где $\chi_1^{(r)}$ и $\chi_2^{(r)}$ – корни уравнения (3.21) с положительными действительными частями. Для замкнутых круговых цилиндрических оболочек принимаем $k = n_0 2\pi / s, n_0 \in N$, где s – полная длина направляющей окружности, а для незамкнутых круговых цилиндрических оболочек принимаем $k = \pi / s$, где s – длина направляющей окружности лежащей между граничными образующими.

При $r_0 \rightarrow 0$ уравнения (3.21) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} & (\chi^{(r)})^4 - \left(\frac{B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2 B_{12}^{(r)} B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 \right) (\chi^{(r)})^2 + \\ & + (m^2 - (\eta^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 \right) = 0, m = \overline{1,+\infty}, r = 1,2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Эти уравнения являются характеристическими уравнениями систем, моделирующих планарные колебания составной бесконечной пластинки (при $k = n_0 2\pi / s, n_0 \in N$, где s – произвольное положительное число) или бесконечной пластинки-полосы (при $k = \pi / s$,

где s – ширина пластинки-полосы). Корни $\chi^{(r)}/m$ уравнения (3.22) с положительными действительными частями обозначим через $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$. Тогда, в этом случае, для дисперсионных уравнений (2.15) справедливы следующие асимптотические формулы

$$\Delta_m = \frac{B_{11}^{(1)} B_{11}^{(2)}}{B_{66}^{(1)} B_{66}^{(2)}} \frac{m^{12} B_{11}^{(1)} B_{11}^{(2)}}{(B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)})(B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})} N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \Delta_m^* + O(r_0/(2m^2)), \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.23)$$

$$N^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = \frac{B_{22}^{(r)}(B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2)}{(B_{11}^{(r)})^3} + \frac{B_{12}^{(r)}(B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{66}^{(r)} B_{12}^{(r)} - B_{66}^{(r)} B_{22}^{(r)})}{(B_{11}^{(r)})^3} (\eta_m^{(r)})^2$$

где Δ_m^* определяются по формуле (3.15).

Учитывая (3.15)-(3.16), дисперсионные уравнения (2.15) можно написать в виде

$$d_m = \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{66}^{(2)}} N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) + O\left(\frac{r_0}{2m^2}\right) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty} \quad (3.24)$$

Из уравнения (3.24) следует, что при $r_0/m^2 \rightarrow 0$ уравнения (2.15) преобразуются в уравнения (3.17). В случае цилиндрических оболочек открытого профиля, при $r_0/m^2 \rightarrow 0$ предполагается, что расстояние между шарнирно закрепленными краями не меняется.

Случай в): $R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$, $r_m = 0$, $m = \overline{2, +\infty}$, т.е. имеем некруговую бесконечную составную замкнутую цилиндрическую оболочку (при $k = 2\pi/s$, где s – полная длина направляющей кривой) или некруговую бесконечную составную цилиндрическую оболочку открытого профиля (при $k = \pi/s$, где s – полная длина направляющей кривой). В этом случае системы уравнений (2.5) принимают вид

$$r_1 P_{m-1}^{(r)} \omega_{m-1}^{(r)} + r_{mm}^{(r)} \omega_m^{(r)} + r_1 P_{m+1}^{(r)} \omega_{m+1}^{(r)} = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad r = 1, 2 \quad (3.25)$$

$$\omega_m = w_m^{(r)} / c_m^{(r)}, \quad r_{mm}^{(r)} = r_0 P_m^{(r)} - 2B_{66}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 C_m^{(r)} / B_{22}^{(r)} \quad (3.26)$$

Так как определители систем (3.25) относятся к нормальному типу, то для нахождения ненулевого решения приравняем их нулю

$$D^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1) = 0, \quad r = 1, 2 \quad (3.27)$$

Решения $(\chi^{(r)})^2$ уравнения (3.27) находятся аналогичным образом как в [10,20]. Для этого, возьмем усеченный определитель из $D^{(r)}$ при конечном n и приравняем нулю

$$D_n^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1) = 0, \quad r = 1, 2 \quad (3.28)$$

Найдем решение $\chi_n^{(r)}$ алгебраических уравнений (3.28). Точное решение уравнения (3.27) следует из $\chi_n^{(r)}$ при $n \rightarrow \infty$. Раскрывая определитель $D_m^{(r)}$ по элементам последнего столбца или строки, получим следующую рекуррентную последовательность:

$$D_1^{(r)} = r_{11}^{(r)}, D_2^{(r)} = r_{22}^{(r)} D_1^{(r)} - r_1^2 P_1^{(r)} P_2^{(r)}$$

$$D_m^{(r)} = r_{mm}^{(r)} D_{m-1}^{(r)} - r_1^2 P_{m-1}^{(r)} P_m^{(r)} D_{m-2}^{(r)}, m = \overline{3, +\infty}$$
(3.29)

Справедливо следующее утверждение: при фиксированном $m \geq 2$ и при $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$ уравнения (3.27) имеют формальные решения вида

$$(\chi_j^{(r)})^2 = (\chi_{mj}^{(r)})^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2 + \beta_{mj}^{(r)} r_1^4 + \dots, j = 1, 2, r = 1, 2$$
(3.30)

где $\chi_{mj}^{(r)}$ ($j = 1, 2$) – корни уравнения $r_{mm}^{(r)} = 0$ (т.е. уравнения (3.21) с положительными действительными частями) и

$$\alpha_{mj}^{(r)} = \frac{P_m^{(r)}(P_{m-1}^{(r)} r_{m+1m+1}^{(r)} + P_{m+1}^{(r)} r_{m-1m-1}^{(r)})}{r_{m-1m-1}^{(r)} r_{m+1m+1}^{(r)} r_{mm}^{(r)}} \Big|_{\chi^{(r)} = \chi_{mj}^{(r)}} \quad j = 1, 2, r = 1, 2$$
(3.31)

где $r_{mm}^{(r)}$ – производная по $(\chi^{(r)})^2$.

Действительно, легко проверить, что каждое уравнение $r_{mm}^{(r)} = 0$ ($r = 1, 2$) при фиксированном m имеет два положительных или комплексно сопряженных $(\chi_{mj}^{(r)})^2, j = 1, 2$ корни. Тогда корни $(\chi^{(r)})^2$ уравнения

$$D_{m+1}^{(r)} = r_{m+1m+1}^{(r)} D_m^{(r)} - r_1^2 P_m^{(r)} P_{m+1}^{(r)} D_{m-1}^{(r)} = (r_{m+1m+1}^{(r)} r_{mm}^{(r)} - r_1^2 P_m^{(r)} P_{m+1}^{(r)}) D_{m-1}^{(r)} - r_1^2 P_{m-1}^{(r)} P_m^{(r)} r_{m+1m+1}^{(r)} D_{m-2}^{(r)} = 0$$
(3.32)

ищем в виде

$$(\chi_{jm}^{(r)})^2 = (\chi_{mj}^{(r)})^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2 + \beta_{mj}^{(r)} r_1^4 + \dots \quad j = 1, 2, m = \overline{2, +\infty}$$
(3.33)

Подставляя (3.33) в (3.32) и приравнявая коэффициенты при r_1^2 нулю, получим

$$(r_{m+1m+1}^{(r)} r_{mm}^{(r)} \alpha_{mj}^{(r)} - P_{m+1}^{(r)} P_m^{(r)}) D_{m-1}^{(r)} - r_{m+1m+1}^{(r)} P_m^{(r)} P_{m-1}^{(r)} D_{m-2}^{(r)} \Big|_{r_1=0} = 0$$
(3.34)

Учитывая, что $D_{m-1}^{(r)} \Big|_{r_1=0} = r_{m-1m-1}^{(r)} D_{m-2}^{(r)} \Big|_{r_1=0}$, получим формулы (3.31).

Докажем, что если использовать определители более высокого порядка чем $m+1$ и искать нули этого определителя в виде (3.33), то коэффициенты при r_1^2 не изменятся.

Действительно, так как $D_m^{(r)} \Big|_{\chi^{(r)} = \chi_{jm}^{(r)}} = O(r_1^2), D_{m+1}^{(r)} \Big|_{\chi^{(r)} = \chi_{jm}^{(r)}} = O(r_1^4)$ и $D_{m+2}^{(r)} = r_{m+2m+2}^{(r)} D_{m+1}^{(r)} - r_1^2 P_{m+1}^{(r)} P_{m+2}^{(r)} D_m^{(r)}$ то $D_{m+2}^{(r)} \Big|_{\chi^{(r)} = \chi_{jm}^{(r)}} = O(r_1^4)$. Методом математической индукции убеждаемся, что $D_n^{(r)} \Big|_{\chi^{(r)} = \chi_{jm}^{(r)}} = O(r_1^4)$ при $n \geq m+1$. Следовательно, $\alpha_{mj}^{(r)}$ ($j = 1, 2$) не изменяются при $n \rightarrow \infty$, т.е. доказаны представления (3.30) с гарантированными значениями первых двух слагаемых.

Таким образом, в этом случае для нахождения коэффициентов затухания $k\chi_j^{(r)} / m$ ($j = 1, 2$) можно использовать приближенные формулы

$$\chi_j^{(r)} / m = ((\chi_{mj}^{(r)} / m)^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2 / m^2)^{1/2}, \quad (j=1,2) \quad (3.35)$$

а для нахождения соответствующих характеристик собственных частот $\eta^{(r)} / m$ уравнения (2.15).

4. Численные исследования. В таблицах 1-4, используя дисперсионные уравнения (2.15), (3.17), приведены безразмерные характеристики собственных значений $\eta^{(1)} / m$ и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм в зависимости от m, a, b для замкнутых ($0 \leq t \leq 2\pi$) и незамкнутых ($0 \leq t \leq \pi$) цилиндрических оболочек с направляющими

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad a = 2, b = 1.5; \quad a = 2, b = 1. \quad (4.1)$$

В таблицах 1, 2 представлены результаты для вариантов 1,2,3 соответственно при $R^{-2} = k^2(r_0/2 + r_1 \cos k\beta)$; $R^{-2} = k^2 r_0/2$; $R^{-2} = 0$ примененные к замкнутым составным цилиндрическим оболочкам с направляющими (4.1), изготовленными из боропластика и бумаги с механическими параметрами [21], [22]:

$$\begin{aligned} \text{Боропластик: } \rho^{(1)} &= 2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, E_1^{(1)} = 2.646 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, E_2^{(1)} = 1.323 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ G^{(1)} &= 9.604 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \nu_1^{(1)} = 0.2, \nu_2^{(1)} = 0.01, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Бумага: } \rho^{(2)} &= 0.16 \text{ кг/м}^3, E_1^{(2)} = 2.95281 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, E_2^{(2)} = 2.2106 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \\ G^{(2)} &= 9.77076 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2, \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} E_1^{(2)} / E_2^{(2)}, \nu_2^{(2)} = 0.23, \end{aligned} \quad (4.3)$$

и геометрическими параметрами: в таблице 1: $a = 2, b = 1.5, s = 5.52587$ (длина половины эллипса), $k = 4\pi/s, r_0 = 0.273895, r_1 = 0.033796$; в таблице 2: $a = 2, b = 1, s = 4.84422$ (длина половины эллипса), $k = 4\pi/s, r_0 = 0.407139, r_1 = 0.229356$. Результаты представленные в табл. 3,4 соответствуют оболочкам открытого профиля с направляющими равными половине эллипса ($0 \leq t \leq \pi$) с механическими параметрами (4.2), (4.3) и геометрическими параметрами: в таблице 3: $a = 2, b = 1.5, s = 5.52587, k = 2\pi/s, r_0 = 1.09558, r_1 = 0.44729$; в таблице 4: $a = 2, b = 1, s = 4.84422, k = 2\pi/s, r_0 = 1.62856, r_1 = 1.2828$.

В качестве коэффициентов затухания, приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0^{(1)} / m = \max\{-k \operatorname{Re} \chi_1^{(1)} / m, -k \operatorname{Re} \chi_2^{(1)} / m\}, \quad k\chi_0^{(2)} / m = \min\{k \operatorname{Re} \chi_1^{(2)} / m, k \operatorname{Re} \chi_2^{(2)} / m\}$$

Таблица 1

m	Вариант 1			Вариант 2		
	$k\chi_0^{(1)} / m$	$k\chi_0^{(2)} / m$	$\eta^{(1)} / m$	$k\chi_0^{(1)} / m$	$k\chi_0^{(2)} / m$	$\eta^{(1)} / m$
21	-0.0541	1.4824	0.99332	-0.0609	1.4799	0.99153

22	-0.0659	1.4965	0.99006	-0.0677	1.4944	0.98949
23	-0.0706	1.5102	0.98858	-0.0713	1.5083	0.98835
24	-0.0733	1.5232	0.98769	-0.0735	1.5214	0.98759
25	-0.0750	1.5355	0.98709	-0.0751	1.5338	0.98704
40	-0.0818	1.6581	0.98460	-0.0818	1.6571	0.98460
50	-0.0827	1.7022	0.98423	-0.0827	1.7016	0.98423
100	-0.0838	1.7854	0.98380	-0.0838	1.7853	0.98380
250	-0.0841	1.8187	0.98369	-0.0841	1.8187	0.98369
Вариант 3: $k\chi_0^{(1)}/m=-0.0842$, $k\chi_0^{(2)}/m=1.8259$; $\eta^{(1)}/m=0.98367$						

Таблица 2

m	Вариант 1			Вариант 2		
	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
25	-0.0213	1.7161	0.99922	-0.0613	1.6799	0.99343
26	-0.0480	1.7288	0.99599	-0.0727	1.6936	0.99071
27	-0.0639	1.7408	0.99286	-0.0750	1.7071	0.98930
28	-0.0731	1.7524	0.99061	-0.0812	1.7200	0.98839
29	-0.0787	1.7636	0.98910	-0.0834	1.7324	0.98773
30	-0.0823	1.7744	0.98808	-0.0851	1.7442	0.98724
40	-0.0918	1.8588	0.98511	-0.0915	1.8363	0.98518
50	-0.0936	1.9133	0.98449	-0.0934	1.8965	0.98455
100	-0.0959	2.0709	0.98370	-0.0954	2.0175	0.98386
250	-0.0959	2.0709	0.98367	-0.0959	2.0707	0.98370
Вариант 3: $k\chi_0^{(1)}/m=-0.0960$, $k\chi_0^{(2)}/m=2.0829$; $\eta^{(1)}/m=0.98367$						

Таблица 3

m	Вариант 1			Вариант 2		
	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
41	-0.0114	0.7450	0.99883	-0.0268	0.7363	0.99345
42	-0.0197	0.7485	0.99649	-0.0304	0.7400	0.99153
43	-0.0253	0.7519	0.99415	-0.0325	0.7436	0.99034
44	-0.0291	0.7552	0.99227	-0.0339	0.7472	0.98949
45	-0.0317	0.7584	0.99083	-0.0349	0.7507	0.98886
50	-0.0370	0.7738	0.98742	-0.0376	0.7669	0.98704
100	-0.0414	0.8536	0.98421	-0.0414	0.8508	0.98424
250	-0.0420	0.8996	0.98375	-0.0420	0.8994	0.98375
Вариант 3: $k\chi_0^{(1)}/m=-0.0421$; $k\chi_0^{(2)}/m=0.9130$; $\eta^{(1)}/m=0.98367$						

Таблица 4

m	Вариант 1			Вариант 2		
	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
49	-0.0020	0.8706	0.99972	-0.0226	0.8367	0.99645
50	-0.0086	0.8739	0.99949	-0.0306	0.8399	0.99343
51	-0.0152	0.8770	0.99839	-0.0342	0.8434	0.99179
52	-0.0209	0.8800	0.99694	-0.0364	0.8468	0.99070

53	-0.0256	0.8829	0.99543	-0.0379	0.8502	0.98991
54	-0.0293	0.8857	0.99400	-0.0390	0.8535	0.98929
55	-0.0323	0.8884	0.99271	-0.0399	0.8568	0.98879
100	-0.0469	0.9645	0.98442	-0.0467	0.9482	0.98455
250	-0.0478	1.0213	0.98378	-0.0478	1.0193	0.98375
Вариант 3: $k\chi_0^{(1)}/m=-0.0480$; $k\chi_0^{(2)}/m=1.0414$; $\eta^{(1)}/m=0.98367$						

Отметим, что связь между $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ имеет вид

$$\eta^{(2)} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \cdot \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{66}^{(2)}} \eta^{(1)}$$

Заключение: В статье показано, что у линии раздела материалов составной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей могут существовать колебания, затухающие от линии раздела материалов вдоль ее образующих. Частоты собственных интерфейсных колебаний бесконечных цилиндрических оболочек, составленных из двух полубесконечных ортотропных безмоментных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами, определяются совокупностью уравнений (2.15). Для круговой цилиндрической оболочки коэффициенты затухания χ определяются совокупностью уравнений (3.21), а для пластинки – уравнений (3.22). Частоты собственных интерфейсных колебаний для составной бесконечной пластинки или бесконечной пластинки-полосы определяются из совокупности уравнений (3.17). Существование интерфейсных колебаний зависит от кривизны направляющей кривой и коэффициентов упругости. При больших m или при малой кривизне направляющей кривой все характеристики собственных интерфейсных колебаний безмоментной замкнутой или незамкнутой цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных интерфейсных колебаний бесконечной пластинки и пластинки-полосы соответственно. Численный анализ показывает, что с увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты интерфейсных колебаний увеличиваются, а процесс **затухания зависит от свойств материалов и геометрических параметров.**

Работа выполнена при поддержке гранта “БРФФИ–ГКН Арм. 2011” №Ф11АРМ-010 / 11РБ-007.

Литература

1. Зильбергейт А.С., Сулова И.Б. // Акуст. журнал. 1985. Т. 29, № 2. С. 186-191.
2. Гринченко В.Т., Городецкая Н.С. // Прикл. механика. 1985. Т. 21, № 5. С. 121-125.

3. Гертман И.П. , Лисицкий О.Н. // Прикл. математика и механика. 1988. Т. 52, № 6. С. 1044-1048.
4. Stoneley R. // Proc. Roy Soc. London A. 1924. V. 106. PP. 416-429.
5. Викторов И.А. // Акуст. журнал. 1979, Т. 25. № 1. С. 1-17.
6. Karplunov J.D., Wilde M.V. // J. Acoust. Soc. Am. June 2002. V. 111 (6). PP. 2692-2704.
7. Karplunov J.D. and Wilde M.V. // ZAMP. 2000. Vol. 51. PP. 530-549.
8. Ермоленко В.М. // ПМТФ. 1980. № 1. С.163-170.
9. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
10. Гулгазарян Г.Р. // Изв. АН РФ, МТТ. 2007. № 1. С. 84-99.
11. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.; Наука, 1979. 383с.
12. Лионс Ж.Л., Модженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371с.
13. Солонников В.А. // Изв. АН СССР, Математика. 1964. Т. 28, № 3. С. 665-706.
14. Лопатинский Я.Б. // Укр. мат. ж. 1953. Т. 5, № 2. С. 123-151.
15. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. // Сиб. Мат. Ж. 1973. Т. 4, № 5. С. 978-986.
16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления М.; физматгиз, т. 3. 1966. 656с.
17. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа М.-Л.: Гостехиздат. 1952. 695с.
18. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин М.: Наука, 1967. 266с.
19. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наукова думка, 1981. 284с.
20. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G. // Int. Appl. Mechanics. 2006. 42 (12). PP. 1398-1413.
21. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. // Изв. АН СССР, МТТ. 1982. N 3. С. 171-174.
22. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Гос.изд.физ.мат.лит, 1961. 384с.

Free interfacial vibrations of unmoment infinite cylindrical shells with arbitrary smooth directing curve.
G.R. Ghuldhazaryan^a, L.G. Ghuldhazaryan^a, I.A. Miklashevch^b, A.A. Pletezhov^b and A.A. Khachanyan^a
a Armenian state pedagogical university after Kh. Abovyan
b Belarusian national technical university

SUMMARY. Free interfacial vibrations of closed and non-closed infinite cylindrical shells composed of two semi-infinite orthotropic shells with different elastic properties are studied. Investigations have been carried out for thin elastic shells when bending rigidity is vanishingly small (unmoment shells). Asymptotic link is established between the dispersion equations of problems in hand and analogous problems for infinite composed plate and plate-strip. Conditions of existence of free interfacial vibrations for coefficients of elasticity of composed cylindrical shells are established. Calculations are carried out for shells with directing curves in forms of closed and non-closed ellipses with different curvatures. It is showed that with increasing the square of curvature of directing curve of cylindrical shells first frequencies of interfacial vibrations are increasing while damping is decreasing.

Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей

Г.Р. Гулгазарян^а, Л.Г. Гулгазарян^а, И.А. Миклашевич^б, А.А. Плетежов^б, А.А. Хачанян^а

^а Армянский государственный педагогический университет им Х. Абовяна

^б Белорусский национальный технический университет

Исследуются свободные интерфейсные колебания бесконечных замкнутых и незамкнутых цилиндрических оболочек составленных из двух полубесконечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими свойствами. Исследования проводятся для тонких упругих оболочек, для которых жесткость на изгиб равна нулю (безмоментная оболочка). Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемых задач и аналогичными задачами для бесконечных составных пластин и пластин-полос. Установлены условия на коэффициенты упругости составных цилиндрических оболочек для существования интерфейсных колебаний. Проведены численные расчеты для оболочек с направляющими в виде замкнутых и незамкнутых эллипсов с различными величинами кривизны. Показано, что с увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты интерфейсных колебаний увеличиваются, а процесс затухания ослабевает.