Обобщенные почти эрмитовы структуры на однородных Ф–пространствах[1]

Д.В. Вылегжанин
Белорусский ГУ, г. Минск, Беларусь
vylegzhanin@bsu.by

В начале 80-х годов прошлого века в работах В.Ф. Кириченко (см. например, [4]) был разработан новый подход к изучению многообразий со структурами. Основным понятием этого подхода стала конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры (GAH-структуры) и обобщенной эрмитовой геометрии. В случае ранга 1 GAH-структура явилась естественным обобщением таких широко известных структур как почти эрмитова структура, почти контактная структура и некоторых других. Так, одним из основных примеров обобщенной почти эрмтовой структуры ранга 1 в работе [4] является метрическая f-структура. Отметим, что понятие GAH–структуры ранга большего 1 позволяет изучать многообразия, снабженные несколькими классическими попарно перестановочными структурами.

В 90-х годах, в работах В.В. Балащенко и Н.А. Степанова [2] на однородных Ф-пространствах были описаны канонические структуры классических типов, а также предъявлены алгоритмы их построения. Вследствие этого возник обширный класс многообразий с несколькими перестановочными структурами, в том числе и с f-структурами.

В результате исследований на таких многообразиях были реализованы конструкции обобщенных почти эрмитовых структур рангов 1 и более [3]. Ниже предлагаются некоторые результаты изучения таких структур.

Напомним основные определения.

Определение 1. [4] *Обобщенной почти эрмитовой структурой (короче GAH-структурой) ранга r на гладком многообразии M называется совокупность $\{g, J_1, \dots, J_r, T\}$ тензорных полей на M, где $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — псевдориманова метрика на M, $J_1, \dots, J_r$ — линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа $(1,1)$, называемые структурными аффинорами, или структурными операторами, определенные в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и являющиеся вместе со своими квадратами и тождественным аффинором образующими некоторого подмодуля, являющегося подалгеброй алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия, T —*

[1]Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (код проекта Ф10Р-132) в рамках совместного проекта БРФФИ-РФФИ.

тензор типа $(2,1)$*, называемый композиционным тензором. При этом должны выполняться условия:*

1. $\langle J_i X, Y\rangle + \langle X, J_i Y\rangle = 0$;
2. $T(J_i X, Y) = T(X, J_i Y) = -J_i T(X,Y)$;
3. $T_X g = 0$;
4. $\bigcap\limits_{i=1}^{r} ker J_i \subset ker T \subset \bigcap\limits_{i=1}^{r} ker(J_i^5 - \lambda_i J_i)$;
5. $J_i J_j = J_j J_i$.

Здесь $i,j = 1,\ldots,r$; $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, $0 < \lambda \in C^\infty(M)$; $T_X Y = T(X,Y)$; *оператор* T_X *отождествляется с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры многообразия. Многообразие наделенное* GAH*–структурой, называется обобщенным почти эрмитовым многообразием (*GAH*–многообразием). Символом* GAH *обозначается класс всех* GAH*–структур на* M*.*

Согласно работам В.Ф. Кириченко в названии GAH –многообразий фиксируется соответствующее свойство его присоединенной Q–алгебры. Поскольку операция в Q – алгебре определяется посредством композиционного тензора, то основные классы GAH–многообразий можно определить следующим образом:

- $T(X,Y) = 0$ — GH–многообразие (обобщенное эрмитово многообразие);
- $T(X,X) = 0$ — обобщенное G_1–многообразие;
- $\langle\langle T(X,Y),Z\rangle\rangle + \langle\langle T(Y,Z),X\rangle\rangle + \langle\langle T(Z,X),Y\rangle\rangle = 0$ — обобщенное G_2–многообразие;
- $\nabla_X(J_i)Y - 2T(X,Y) = 0$ — GQK-многообразие (обобщенное квазикелерово многообразие);
- $GQK \bigcap GG_1$ — GNK–многообразие (обобщенное приближенно келерово многообразие).

Здесь $\langle\langle X,Y\rangle\rangle = \langle id\, X, Y\rangle\, id + \sum\limits_{i=1}^{r} \langle J_i^3 X, Y\rangle J_i$.

Отметим, что для метрических f–многообразий тензор T был точно указан [4]:

$$T(X,Y)=\frac{1}{4}J(\nabla_{JX}(J)JY-\nabla_{J^2X}(J)J^2Y).$$

Рассмотрим *однородное* Φ*-пространство* G/H произвольного порядка k ($k\geq 2$), порождаемое автоморфизмом Φ ($\Phi^k=id$). Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ – соответствующие алгебры Ли, $\varphi=d\Phi_e$ – автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$ – *каноническое редуктивное* разложение, $\theta=\varphi|_{\mathfrak{m}}$, $s=[\frac{k-1}{2}]$ (целая часть), $u=s$ (при нечетном k), $u=s+1$ (при четном k), $i=\overline{0,u}$. Обозначим через L_i операторы $L_i(X)=\varphi^2(X)-2\cos\frac{2\pi i}{k}\varphi(X)+X$ на $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{m}_i=\mathrm{Ker}\ L_i$, тогда в соответствии со спектром автоморфизма φ запишем разложение алгебры $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0\oplus\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0\oplus\mathfrak{m}_1\oplus...\oplus\mathfrak{m}_u,$$

причем некоторые подпространства могут быть нулевыми (спектр оператора φ не максимален).

Известно [2], что на *однородном* Φ*-пространстве* G/H произвольного порядка k ($k\geq 3$) существуют канонические f-структуры, которые в терминах оператора θ записываются в виде:

$$f=\frac{2}{k}\sum_{m=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{u}\zeta_j\sin\frac{2\pi mj}{k}\right)\left(\theta^m-\theta^{k-m}\right),$$

где $u=\begin{cases} n, & \text{если } k=2n+1\\ n-1, & \text{если } k=2n\end{cases}$, а $\zeta_j\in\{-1,0,1\}, j=1,2,\dots u$, причем среди чисел ζ_j есть отличные от нуля. Канонические f-структуры f_j, определяемые наборами $(\zeta_1,\dots\zeta_j,\dots\zeta_u)$, в которых $\zeta_j=1$, а остальные числа равны нулю, называются *базовыми* каноническими f-структурами. Поясним, что для некоторой базовой f–структуры f_i образ полностью совпадает с пространством $\mathfrak{m}_i$.

Доказано [3, 1], что на таком пространстве существует обобщенная почти эрмитова структур ранга r.

Теорема 1. *Пусть G/H — однородное Φ–пространство порядка k, причем спектр оператора θ состоит из s пар корней степени k из 1. Предположим, что g — инвариантная псевдориманова метрика на G/H, с которой согласованы все базовые f–структуры. Тогда на указанном пространстве может быть задана GAH–структура $\{g,f_1,\dots f_r,T\}$ ранга $r=s-1$, если -1 принадлежит спектру оператора θ, и ранга $r=s$ в противном случае.*

Пусть далее T_i — композиционный тензор для GAH-структуры $\{g,f_i,T_i\}$ ранга 1. Рассмотрим обобщенную почти эрмитову структуру ранга r, описанную в теореме 1. В результате исследования взаимосвязи структур разных рангов ранее были получены следующие результаты:

Теорема 2. [3] $\{g, f_1, \dots f_r, T\}$ *является* GH*–структурой* $\Leftrightarrow$ $\{g, f_i, T_i\}$ *является* GH*–структурой* $\forall i = \overline{1, r}$.

Теорема 3. [3] $\{g, f_1, \dots f_r, T\}$ *является* GG_1*–структурой* $\Leftrightarrow$ $\{g, f_i, T_i\}$ *является* GG_1*–структурой* $\forall i = \overline{1, r}$.

Теорема 4. [3] $\{g, f_1, \dots f_r, T\}$ *является* GG_2*–структурой* $\Leftrightarrow$ $\{g, f_i, T_i\}$ *является* GG_2*–структурой* $\forall i = \overline{1, r}$.

Новыми являются следующие утверждения:

Теорема 5. $\{g, f_1, \dots f_r, T\}$ *является* GQK*–структурой* $\Leftrightarrow$ $\{g, f_i, T_i\}$ *является* GQK*–структурой* $\forall i = \overline{1, r}$.

Теорема 6. $\{g, f_1, \dots f_r, T\}$ *является* GNK*–структурой* $\Leftrightarrow$ $\{g, f_i, T_i\}$ *является* GNK*–структурой* $\forall i = \overline{1, r}$.

В работах В.В. Балащенко и А.С. Самсонова получены соотношения между подпространствами редуктивного разложения, а также установлены некоторые свойства обобщенных почти эрмитовых структур ранга 1. Используя эти соотношения, получена теорема:

Теорема 7. *Пусть* G/H *— естественно редуктивное однородное* Φ*–пространство порядка* k*. Тогда любая* GAH*–структура ранга* r*, построенная на базовых* f*–структурах и не содержащая* f*–структуру с индексом* i *таким, что* $3i = k$*, является* GH*–структурой ранга* r.

В некоторых случаях на одном и том же пространстве G/H возможно задать структуру Φ–пространств разных порядков. Рассмотрим один частный случай.

Пусть G/H — однородное Φ–пространство порядка 12 ($\Phi^{12} = id$), $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ — соответствующее редуктивное разложение, θ — ограничение $\varphi = d\Phi$ на $\mathfrak{m}$, ε — примитивный корень 12-ой степени из 1. Тогда в случае полного спектра оператора θ редуктивное дополнение представляется в виде $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{m}_4 \oplus \mathfrak{m}_5 \oplus \mathfrak{m}_6$, где $\mathfrak{m}_i$ — компонента, отвечающая корню ε^i. Можно показать, что в этом случае на G/H существуют 5 базовых канонических f-структур. Как и ранее, обозначим эти базовые структуры через f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, где индекс означает, что образ структуры f_i совпадает с $\mathfrak{m}_i$. Оставшиеся канонические структуры на этом пространстве могут быть получены как линейные комбинации базовых структур с коэффициентами $\{-1, +1, 0\}$. Ранее доказано, что в случае, когда структуры f_i согласованы с некоторой инвариантной (псевдо)римановой метрикой, то и структуры, построенные по структурам f_i указанным способом, также согласованы с этой же метрикой. Таким образом, на однородном Φ–пространстве G/H порядка 12, снабженном метрикой, согласованной с действием канонических f–структур, существуют обобщенные почти эрмитовы структуры рангов от 1 до 5. Ранее уже обсуждалось, что каждая из канонических f-структур, в описанной ситуации, может быть рассмотрена как обобщенная почти эрмитова структура ранга 1. Важной особенностью всех этих структур является их инвариантность относительно симметрий порядка 12 однородного многообразия G/H.

Используя полученные общие результаты, заключаем, что все базовые f–структуры (кроме f_4) можно рассматривать как GH–структуры ранга 1. Любые GAH–структуры рангов больших 1, построенные на структурах f_1, f_2, f_3, f_5, будут являться GH–структурами соответствующих рангов.

Если же мы будем рассматривать обобщенные почти эрмитовы структуры, построенные на f–структурах, не являющихся базовыми, то в некоторых случаях свойства таких структур можно получить, используя описанный ниже подход.

Рассмотрим случай, когда только (-1) не входит в спектр θ (т.е. $\mathfrak{m}_6 = 0$). Тогда, G/H можно рассматривать как Φ_1-пространство порядка 6 ($\Phi_1 = \Phi^2$), при этом каноническое редуктивное разложение примет вид $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}'_1 \oplus \mathfrak{m}'_2 \oplus \mathfrak{m}'_3 \oplus \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{m}'_1$, $\mathfrak{m}'_2$ и $\mathfrak{m}'_3$ соответственно отвечают уже корням ε^2, ε^4 и $\varepsilon^6 = -1$ оператора $\theta_1 = \varphi_1|_{\mathfrak{m}} = \theta^2$, $\varphi_1 = d\,\Phi_1$. При этом $\mathfrak{m}'_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_5$, $\mathfrak{m}'_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_4$ и $\mathfrak{m}'_3 = \mathfrak{m}_3$. Таким образом, на Φ_1-пространстве G/H порядка 6 оператор θ_1 обладает полным спектром и, следовательно, на G/H существуют 2 базовые f-структуры f'_1 и f'_2. Доказано, что $f'_1 = f_1 - f_5$, $f'_2 = f_2 - f_4$. В результате мы получаем, что обобщенная почти эрмитова структура $\{g, F_1 = f_1 - f_5, F_2 = f_2 - f_4, T\}$ ранга 2 на естественно редуктивном однородном Φ-пространство порядка 12 будет полностью совпадать с обобщенной почти эрмтовой структурой $\{g, f'_1, f'_2, T\}$ ранга 2 на Φ_1-пространстве порядка 6. Ранее был установлен ряд свойств для канонических структур на однородном Φ-пространстве порядка 6. Опираясь на эти результаты, получаем:

Теорема 8. *Пусть* $(G/H, g)$ *естественно редуктивное однородное* Φ-*пространство порядка* 12, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ — *соответствующее редуктивное разложение. Пусть* (-1) *не входит в спектр оператора* $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$, *где* $\varphi = d\,\Phi$. *Тогда канонические* f-*структуры* $F_1 = f_1 - f_5$ *и* $F_2 = f_2 - f_4$ *являются* NKf-*структурами.*

Теорема 9. *Пусть* $(G/H, g)$ *естественно редуктивное однородное* Φ*-пространство порядка* 12, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ *— соответствующее редуктивное разложение. Пусть* (-1) *не входит в спектр оператора* $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$*, где* $\varphi = d\,\Phi$*. Каноническая* f*-структура* $F_3 = f_1 + f_2$ *является* NKf*-структурой тогда и только тогда, когда* $[\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_5 \oplus \mathfrak{m}_4] \subset \mathfrak{m}_3$*.*

Теорема 10. *Пусть* $(G/H, g)$ *естественно редуктивное однородное* Φ*-пространство порядка* 12, $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ *— соответствующее редуктивное разложение. Пусть* (-1) *не входит в спектр оператора* $\theta = \varphi|_{\mathfrak{m}}$*, где* $\varphi = d\,\Phi$*. Для* $(G/H, g)$ *следующие условия эквивалентны:*
1) $F_4 = f_1 - f_2$ *является* NKf*-структурой;*
2) $[\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_4 \oplus \mathfrak{m}_5] \subset \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_5$*;*
3) $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_4 \oplus \mathfrak{m}_5$ *- подалгебра Ли в* $\mathfrak{g}$*.*

Библиографический список

[1] *Балащенко В.В., Вылегжанин Д.В.* Обобщенная эрмитова геометрия на однородных Φ–пространствах конечного порядка // *Известия высших учебных заведений.* — 2004. — № 10. — С. 33–44.

[2] *Балащенко В.В., Степанов Н.А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ–пространствах // *Мат. сборник.* — 1995. — Т. 186, № 11. — С. 3–34.

[3] *Вылегжанин Д.В.* Естественная конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры // *Вестник Витебского ун-та.* — 2001. — № 2. — С. 114–119.

[4] *Кириченко В.Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. — М.: ВИНИТИ, 1986. — Т. 18. — С. 25–71.