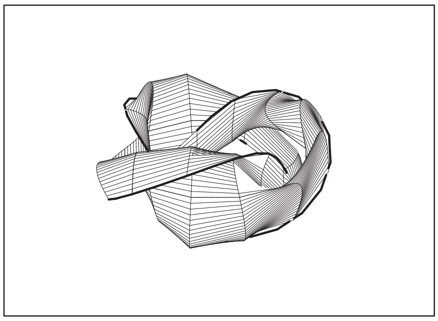

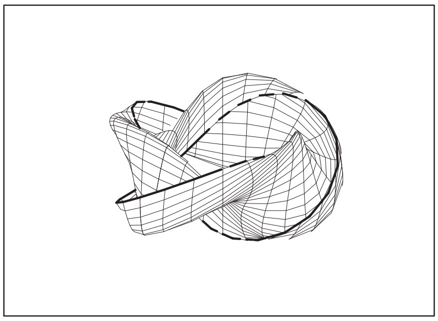

Рис. 4: Разрезание перекрученной бутылка Клейна, $f_1(v) = sin(v), f_2(v) = sin(2v), a = 4, n = 3$ на листы Мебиуса.

Библиографический список

[1] *Васильев А.Н.* Maple 8. — М., С-Пб., Киев: Диалектика, 2003.

[2] *Чешкова М.А.* О листе мебиуса // *Вестник БГПУ.* — 2006. — Т. 6. — С. 83–86.

Структуры почти произведения с коммутирующими распределениями [1]

Ю.Д. Чурбанов
Белорусский ГУ, г. Минск, Беларусь
churbanovi@mail.ru

Abstract. We study the homogeneous spaces with invariant almost product structures.

Пусть G/K - однородное пространство с инвариантной относительно действия группы Ли G структурой почти произведения P. Обозначим алгебры Ли групп G и K через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ соответственно, а касательное пространство к G/K в точке $o = K$ через $\mathfrak{m}$. Обозначим так же ограничение оператора P на $\mathfrak{m}$ через P_o, а собственные подпространства оператора P_o, отвечающие значениям 1 и -1 соответственно, через V и H. Свойства структуры P, очевидно, зависят от подпространств V и H, и, в частности, от того,

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ-РФФИ (код проекта №Ф10Р-132), полученного в рамках выполнения совместного проекта БРФФИ-РФФИ.

куда попадают подпространства $[V,V]_{\mathfrak{m}}, [H,H]_{\mathfrak{m}}$, $[V,H]_{\mathfrak{m}}$. Эти включения связаны с тем как оператор P_o действует на скобку Ли $[X,Y]_{\mathfrak{m}}$. Обозначим через (A,B,C) возможные включения скобок $[V,V]_{\mathfrak{m}}, [H,H]_{\mathfrak{m}}, [V,H]_{\mathfrak{m}}$, где на первом месте стоит распределение, в которое попадает подпространство $[V,V]_{\mathfrak{m}}$, на втором – $[H,H]_{\mathfrak{m}}$, на третьем – $[V,H]_{\mathfrak{m}}$. При этом будем обозначать символом $\varnothing$, если возможно попадание подпространства и в V и в H. Таким образом, например, тройка $(V,H,\varnothing)$ обозначает, что $[V,V]_{\mathfrak{m}} \subset V$, $[H,H]_{\mathfrak{m}} \subset H$, $[V,H]_{\mathfrak{m}} \subset V \oplus H$. Если же A, B, или C равны 0, то это означает, что скобка соответствующих подпространств равна 0. Назовем тройку (A,B,C) *типом* структуры почти произведения P. Кроме того, отождествим равенство

$$a_1P_o[X,Y]_{\mathfrak{m}} = a_2[X,Y]_{\mathfrak{m}} + a_3[X,P_oY]_{\mathfrak{m}} + a_4[P_oX,Y]_{\mathfrak{m}} +$$

$$a_5[P_oX,P_oY]_{\mathfrak{m}} + a_6P_o[X,P_oY]_{\mathfrak{m}} + a_7P_o[P_oX,Y]_{\mathfrak{m}} + a_8P_o[P_oX,P_oY]_{\mathfrak{m}}$$

с набором $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$, который назовем *сигнатурой* структуры P где a_i – некоторые целые числа. Ясно, что между типом и сигнатурой структуры почти произведения существует взаимно однозначное соответствие.

В работе рассматриваются инвариантные структуры почти произведения однородных пространств для которых
$[V,H]_{\mathfrak{m}} = 0$.

Очевидна следующая

Теорема 1. *Пусть G/K – однородное пространство с инвариантной структурой почти произведения P. Условие*
$[V,H]_{\mathfrak{m}} = 0$ равносильно одному из эквивалентных условий:

1) $[X,P_oY]_{\mathfrak{m}} = [P_oX,Y]_{\mathfrak{m}}$;
2) $[X,Y]_{\mathfrak{m}} = [P_oX,P_oY]_{\mathfrak{m}}$;
3) $[X,P_oX]_{\mathfrak{m}} = 0$,
где X,Y – произвольные элементы из $\mathfrak{m}$.

Теорема 2. *Пусть G/K – однородное пространство с инвариантной структурой почти произведения P для которой $[V,H]_{\mathfrak{m}} = 0$. Имеют место следующие соответствия*

№	тип	сигнатура
1	(V,V,0)	(3,1,0,0,1,0,0,1)
2	(V,H,0)	(1,0,1,0,0,0,0,0)
3	(V,0,0)	(7,1,1,1,1,1,1,1)
4	(V,∅,0)	(5,1,1,1,1,-1,-1,3)
5	(∅,V,0)	(5,1,-1,-1,1,1,1,3)
6	(0,V,0)	(7,1,-1,-1,1,-1,-1,1)
7	(∅,0,0)	(3,0,0,0,0,1,1,1)
8	(∅,∅,0)	(1,0,0,0,0,0,0,1)
9	(H,H,0)	(3,-1,0,0,-1,0,0,1)
10	(H,V,0)	(1,0,-1,0,0,0,0,0)
№	тип	сигнатура
11	(H,0,0)	(7,-1,-1,-1,-1,1,1,1)
12	(H,∅,0)	(5,-1,-1,-1,-1,-1,-1,3)
13	(∅,H,0)	(5,-1,1,1,-1,1,1,3)
14	(0,H,0)	(7,-1,1,1,-1,-1,-1,1)
15	(0,∅,0)	(3,0,0,0,0,-1,-1,1)
16	(0,0,0)	(1,0,0,0,0,0,0,0)

Доказательство. Т.к. доказательство всех 16 формул проходит по одной схеме, то проведем его только в первом случае.

Пусть структура почти произведения имеет тип $(V, V, 0)$. Учитывая эти включения, легко показать, что $P_o[X,Y]_\mathfrak{m} = [X_V, Y_V]_V + [X_H, Y_H]_V$. Но $X_V = \frac{1}{2}(P_o(X) + X), X_H = \frac{1}{2}(P_o(X) - X)$. Тогда из последнего получаем, что $3P_o[X,Y]_\mathfrak{m} = [X,Y]_\mathfrak{m} + [P_oX, P_oY]_\mathfrak{m} + P_o[P_oX, P_oY]_\mathfrak{m}$. Это доказывает, что сигнатура этой структуры почти произведения имеет вид (3,1,0,0,1,0,0,1).

Обратно, пусть сигнатура структуры почти произведения (3,1,0,0,1,0,0,1). Нетрудно проверить, что выполняются включения $[V,V]_\mathfrak{m} \subset V, [H,H]_\mathfrak{m} \subset V, [V,H]_\mathfrak{m} = 0$.

Теорема 3. *Пусть G/K – однородное пространство с инвариантной структурой почти произведения P для которой $[V,H]_\mathfrak{m} = 0$. Если структура почти произведения P интегрируема, то имеют место совпадения следующих типов структур:*

1)$(V,V,0) = (V,0,0) = (\varnothing,V,0) = (\varnothing,0,0)$;
2)$(V,H,0) = (V,\varnothing,0) = (\varnothing,\varnothing,0) = (\varnothing,H,0)$;
3)$(0,V,0) = (H,V,0) = (H,0,0) = (0,0,0)$;
4)$(H,H,0) = (H,\varnothing,0) = (0,H,0) = (0,\varnothing,0)$.

Доказательство. Поскольку интегрируемость структуры почти произведения равносильна включениям [1] $[V,V]_{\mathfrak{m}} \subset V$, $[H,H]_{\mathfrak{m}} \subset H$, то доказательство легко следует из сравнения типов структур.

Теорема 4. *Пусть G/K – однородное периодическое Φ-прост- ранство [2] для которого $\mathfrak{m}^{\varphi} \subset \mathfrak{k}$ [3]. Тогда для любой существующей на нем инвариантной структуры почти произведения $[V,H]_{\mathfrak{m}} = 0$.*

Доказательство. Поскольку в этом случае касательное пространство $\mathfrak{m}$ представимо в виде[4] $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus ... \oplus \mathfrak{m}_a$, причем если $\mathfrak{m}^{\varphi} \subset \mathfrak{k}$, то $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0$, при $i \neq j$ [3], а подпространства V и H, очевидно, состоят из разных подпространств $\mathfrak{m}_i$, то отсюда легко следует вывод теоремы.

Теорема 5. *Пусть G/K – однородное Φ-пространство порядка 8 для которого $\mathfrak{m}^{\varphi} \subset \mathfrak{k}$. Тогда на нем могут существовать канонические структуры почти произведения [4, 5] следующих типов: $(H,H,0),(H,V,0),(0,\varnothing,0),(\varnothing,V,0),(H,\varnothing,0)$.*

Доказательство. Поскольку в этом случае касательное пространство $\mathfrak{m}$ представимо в виде[4] $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{m}_4$, и $\mathfrak{m}^{\varphi} \subset \mathfrak{k}$, то $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] = 0$, при $i \neq j$ [3]. Значит канонические структуры почти произведения на этих пространствах, которые могут существовать, имеют следующие распределения: $P_1 : V = \mathfrak{m}_1, H = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{m}_4$, $P_2 : V = \mathfrak{m}_2, H = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{m}_4$, $P_3 : V = \mathfrak{m}_3, H = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_4$, $P_4 : V = \mathfrak{m}_4, H = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$, $P_{1,2} : V = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2, H = \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{m}_4$, $P_{1,3} : V = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_3, H = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_4$, $P_{1,4} : V = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_4, H = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3$. Кроме того, для подпространств $\mathfrak{m}_i$ возможны следующие включения [4] $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_2$, $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_4$, $[\mathfrak{m}_3, \mathfrak{m}_3]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_2$, $[\mathfrak{m}_4, \mathfrak{m}_4]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{k}$. Теперь легко проверить, что P_1 и $P_{1,4}$ имеют тип $(H,\varnothing,0)$, P_2 имеет тип $(H,V,0)$, P_3 и $P_{1,3}$ имеют тип $(H,H,0)$, P_4 имеет тип $(0,\varnothing,0)$, $P_{1,2}$ имеет тип $(\varnothing,V,0)$

Теорема 6. *Пусть G/K – однородное редуктивное риманово пространство. Если на нем существует инвариантная структура почти произведения типа $(H,V,0)$, то G/K локально симметрично т.е.($[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$).*

Доказательство. Пусть на G/K существует инвариантная структура почти произведения указанного типа, т.е.
$P_o[X,Y]_{\mathfrak{m}} = -[X, P_oY]_{\mathfrak{m}}$. Значит $[X,Y]_{\mathfrak{m}} = [P_oX, P_oY]_{\mathfrak{m}}$.

Пусть ∇ – связность Леви-Чевита на G/K, α – ее функция Номидзу [6]. Тогда, учитывая связь ∇ и римановой метрики g [7], получаем $2g_o(\alpha(X,P_oX),P_oZ) = -g_o(X,[P_oX,P_oZ]_{\mathfrak{m}}) - g_o(P_oX,[X,P_oZ]_{\mathfrak{m}}) + g_o(P_oZ,[X,P_oX]_{\mathfrak{m}}) = -g_o(X,[X,Z]_{\mathfrak{m}}) + g_o(X,[X,Z]_{\mathfrak{m}}) \equiv 0, \forall X,Z \in \mathfrak{m}$. Это дает $\alpha(X, P_o X) = 0 \ \forall X \in \mathfrak{m}$. Отсюда

$$\alpha(P_o X, P_o X) + \alpha(X, Y) = 0. \tag{1}$$

Но поскольку [5]

$$\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y), \tag{2}$$

где $U(X, Y)$ симметрично, то из условия $\alpha(X, P_o X) = 0$ получаем $U(X, P_o X) = 0$, что опять дает $U(P_o X, P_o Y) + U(X, Y) = 0$. Но тогда снова учитывая (1) и (2), имеем

$$\frac{1}{2}[P_o X, P_o Y]_{\mathfrak{m}} + U(P_o X, P_o Y) + \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}} = 0,$$

что и доказывает локальную симметричность G/K.

Обратное очевидно, т.к. в этом случае $\alpha(X, Y) \equiv 0$.

Библиографический список

[1] *Балащенко В.В., Степанов Н.А.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф–пространствах // *Матем. сборник.* — 1995. — Т. 186, № 11. — С. 1551–1580.

[2] *Дашевич О.В.* Канонические структуры классического типа на регулярных Ф—пространствах и инвариантные аффинные связности // *Изв. ВУЗов. Математика.* — 1998. — № 10. — С. 23–31.

[3] *Степанов Н.А.* Основные факты теории φ-пространств // *Изв. ВУЗов. Математика.* — 1967. — № 3. — С. 89–95.

[4] *Чурбанов Ю.Д.* Геометрия специальных аффинорных структур однородных Ф-пространств нечетного порядка // *Изв. ВУЗов. Математика.* — 1994. — № 2. — С. 84–86.

[5] *Чурбанов Ю.Д.* Интегрируемость канонических аффинорных структур однородных периодических Ф-пространств // *Изв. ВУЗов. Математика.* — 2008. — № 8. — С. 43–57.

[6] *Gray A.* Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 // *J. Differ. Geom.* — 1972. — Vol. 7. — Pp. 434–369.

[7] *Nomizu K.* Invariant affine connection on homogeneous spaces // *Amer.J.Mat.* — 1954. — Vol. 76, no. 1. — Pp. 33–65.