УДК 330.45

С. Математические и количественные методы
C. Mathematical and Quantitative Methods

ОТ МОНЖА ДО СОВРЕМЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

А. А. КОРОЛЕВА[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Оптимизация логистических схем транспортировки грузов математически требует урегулирования денежных затрат на транспортные потоки. Рассматриваются методы организации оптимальных транспортных потоков. Проводится исторический обзор моделей и методов улучшения транспортной логистики. Особое внимание уделяется легкоразрешимым случаям транспортной задачи со специальными стоимостными функциями. В рамках этой задачи предлагается использовать выпуклостные обобщения матриц Монжа. Данные матрицы позволяют классифицировать стоимостные целевые функции для большинства разрешимых случаев транспортных задач как классического типа, так и типа коммивояжера и др.

Ключевые слова: транспортная задача; оптимизация в логистике; свойство Монжа; выпуклость матриц.

FROM MONGE TO MODERN OPTIMISATION OF TRANSPORT FLOWS

A. A. KOROLEVA[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

The article is devoted to the analysis of flow optimisation methods in transport logistics. The historical review and analysis of the current state are given with a focus on easily solvable cases that generalise the well-known Monge property of cost matrices.

Keywords: transportation problem; optimisation in logistics; Monge property; the convexity of the matrix.

История

До недавнего времени «Оксфордский словарь» определял транспортную логистику как отрасль военной науки по перевозке материалов и персонала. Действительно, логистика развивалась как обобщение опыта успешных логистических решений по перемещению войск и сопутствующих материалов А. Македонского, шведского короля Карла XII при походе в Украину, Ивана Грозного в походах в Ливонию и ВКЛ, А. В. Суворова в походе в Швейцарию. Впервые термин «логистика» появился в Византийской империи, где логисты двора императора Льва VI распределяли продукты питания. Считается, что в русскую науку понятие логистики как практического искусства движения войск ввел в XIX в. барон де А. Д. Жомини, перебежавший из армии Наполеона к Александру I.

Образец цитирования:
Королева АА. От Монжа до современной оптимизации транспортных потоков. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика*. 2021;1:26–36.

For citation:
Koroleva AA. From Monge to modern optimisation of transport flows. *Journal of the Belarusian State University. Economics.* 2021;1:26–36. Russian.

Автор:
Анна Анатольевна Королева – кандидат физико-математических наук, доцент; декан экономического факультета.

Author:
Anna A. Koroleva, PhD (physics and mathematics), docent; dean of the faculty of economics.
koroleva@bsu.by

Важнейшая в логистике задача оптимизации транспортного потока впервые была формализована в 1781 г. главным интендантом в походах Наполеона Гаспаром Монжем, ставшим позднее известным математиком [1]. Однако его результаты, равно как и результаты в 1920 г. советского экономиста А. Н. Толстого [2], широкой известности не получили. И только советский математик, в будущем известный экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике, Л. В. Канторович опубликовал в 1942 г. труд «О перемещении масс» [3]. Идеи Л. В. Канторовича, изложенные в этом издании, а также метод потенциалов, разработанный им совместно с М. К. Гавуриным, долгое время [4] считались основополагающими в сфере транспортной логистики. Когда оптимизаторам потоков в сетях стали известны работы Г. Монжа (примерно с 1990 г.), транспортную задачу начали называть задачей Монжа – Канторовича. На Западе подобными исследованиями занимались Ф. Хичкок [5], Т. Купманс [6], а также Г. Данциг [7]. Существенным продвижением стало потоко-сетевое представление транспортной задачи, разработанное Л. Р. Фордом и Д. Р. Фалкерсоном сначала в отчете корпорации Военно-морского флота США RAND, а затем в их знаменитой монографии [8]. Научный труд В. А. Емеличева, М. М. Ковалева, М. К. Кравцова «Многогранники, графы, оптимизация» [9], получивший широкую известность в мире после перевода в 1984 г. в издательстве Кембриджского университета [10], стал еще одним продвижением в теории транспортных задач, особенно многоиндексных. Обзор современных достижений по классическим задачам Монжа и Канторовича дан в [11].

Основные модели транспортной задачи

Модель Монжа – Канторовича. Пусть X и Y – два сепарабельных метрических пространства, соответствующих вероятностно-измеримым по Радону функциям μ и υ. Пусть $c : X \times Y \to [0, +\infty]$ есть измеримая по Борелю стоимостная функция (например, расстояния). В формулировке Монжа задача состоит в нахождении оптимального транспортного отображения $T : X \to Y$, на котором достигается

$$\inf \int_x c\left(x,\, T\left(x\right)\right) d\mu\left(x\right).$$

Согласно формулировке Канторовича при решении оптимизационной транспортной задачи требуется найти вероятностную меру $\gamma : X \times Y$, на которой достигается

$$\inf \int_{X \times Y} c\left(x, y\right) d\gamma\left(xy\right) : \gamma \in \mathbf{\Gamma}\left(\mu, \upsilon\right),$$

где $\mathbf{\Gamma}\left(\mu, \gamma\right)$ определяет семейство вероятностных мер на $X \times Y$.

Детальный анализ современного состояния исследований модели Монжа – Канторовича представлен в [11].

Матричная модель (классическая транспортная задача). Пусть $\left(m \times n\right)$ – матрица; $c = \left(c_{ij}\right)$ есть стоимость перевозок груза в количестве a_i из пунктов i в пункты j, где этот груз требуется в количестве b_j. В результате транспортная задача упрощается до

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = 1,\ \ldots,\ m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Решается данная задача стандартными программами линейного программирования (см. раздел «Современный программный инструментарий транспортной оптимизации»). На практике обычно рассматриваются различные ее усложнения, связанные с контейнерными перевозками, включающими транспортировку порожних контейнеров. В этом случае при тех же ограничениях стоимостная функция принимает вид $\sum_j \sum_i f_{ij}\left(x_{ij}\right)$, где f_{ij} – порядково-выпуклая функция.

Сетевая модель. На практике лучше моделировать задачу оптимизации транспортных потоков с помощью сетевого представления. Транспортную сеть описывают ориентированным графом $G = (V, E)$ с множествами вершин V и дуг E. Каждая дуга соответствует реальному участку автодороги, а каждая вершина есть узел (перекресток). Направление дуги показывает ход автотранспорта. Магистрали с двусторонним движением имеют парные противоположные дуги. Пусть $S \subseteq V$ есть источники, т. е. вершины, из которых вывозится груз, а $T \subseteq V$ – стоки, т. е. вершины, поглощающие поток. Перемещение по каждой дуге (i, j) сопровождается затратами c_{ij} (или доходами c_{ij} транспортной компании). Получим задачу

$$\min(\max) \sum_{(i,\, j) \in V} c_{ij} x_{ij}$$

при условиях

$$\sum_{j \in V_i^+} x_{ji} - \sum_{j \in V_i^-} x_{ij} \begin{cases} \le a_i, i \in S, \\ = 0, i \in V(SUV), \\ \ge b_{ij}, i \in V, \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij}, (i, j) \in E,$$

где d_{ij} – пропускная способность дуги $(i, j) \in E$; $V_i^+ \left(V_i^-\right)$ – вершины, связанные с вершиной i входящей (выходящей) дугой (j, i) или (i, j).

Рассматривают и многопродуктовые обобщения транспортной задачи, в которых перевозятся отдельно многие продукты, но пропускные способности дуг общие.

В транспортно-логистических приложениях при различных дополнительных ограничениях, кроме вышеизложенных, в качестве стоимостных функций определяют:

1) минимум денежных затрат;
2) минимум приведенных затрат;
3) минимум временных затрат на перевозки;
4) максимум дохода транспортной компании от выполненных перевозок.

Матрицы Монжа и градиентный алгоритм

В работе [1] Г. Монж выделил класс стоимостных матриц, обладавших свойством

$$c_{ij} + c_{kl} \le c_{il} + c_{kj} \text{ для всех } 1 \le i < k \le m. \tag{1}$$

В транспортной оптимизации получили также распространение симметричные матрицы Монжа, или матрицы Супника. Матрицы Монжа возникли, когда точки перемещения груза находились на сторонах многоугольника, а расстояние измерялось в евклидовой метрике.

В работе [12] такие матрицы были названы матрицами Монжа. Если условие (1) выполняется в другую сторону, а именно ≥, то их считают матрицами анти-Монжа. Еще Г. Монж доказал, что транспортную задачу с такой матрицей стоимости решает «жадный» (*glouton* – по Монжу, *greedy* – в англоязычной литературе) алгоритм, который совпадает в транспортной задаче на минимум с алгоритмом минимального элемента. В монографии М. М. Ковалева [13] показано, что на самом деле этот алгоритм есть применение общего градиентного метода для данного класса задач.

Впервые оптимальность плана, построенного градиентным алгоритмом, доказал А. Гофман [12], а позднее и ряд других ученых для разных модификаций транспортной задачи: аксиальной многоиндексной транспортной задачи [14; 15], транспортной задачи с запрещенными дугами [16; 17], общей потоковой задачи [18]; задачи о К-коммивояжерах [19; 20], задачи размещения [21].

Как оказалось, многие другие легкоразрешимые случаи задач оптимизации транспортных логистических потоков также связаны со специальными случаями матриц Монжа и анти-Монжа. Это такие известные результаты, как разрешимые случаи задачи коммивояжера [22; 23], задачи об оптимальных деревьях [24; 25], задачи об оптимальных цепях матриц [26]. Ниже выявим и другие легкоразрешимые задачи оптимизации транспортных систем, обладающих свойствами, подобными свойствам Монжа.

Матрицы Монжа и выпуклость

В работах [27–31] матрицы Монжа описываются как конусы стоимостных матриц, влияние которых облегчает решение задач оптимизации транспортного типа. Резюмируя [27], покажем, что свойство Монжа есть разновидность общего свойства выпуклости функции $c_{i,\, j}$ двух дискретных переменных i и j, и в следующем разделе обобщим вышецитированное исследование конусов подобных функций.

Матрица $C = \left(c_{ij}\right)_{m \times n}$, как функция переменных i и j для всех i, j, будет называться:

- субмодулярной, если $c_{i-1j-1} + c_{ij} \le c_{ij-1} + c_{i-1j}$;
- супермодулярной, если $c_{i-1j-1} + c_{ij} \ge c_{ij-1} + c_{i-1j}$;
- модулярной, если $c_{i-1j-1} + c_{ij} = c_{ij-1} + c_{i-1j}$;
- вогнутой, если $c_{i-1j} + c_{i+1j} \le 2c_{ij}$, $c_{ij-1} + c_{ij+1} \le 2c_{ij}$;
- выпуклой, если $c_{i-1j} + c_{i+1j} \ge 2c_{ij}$, $c_{ij-1} + c_{ij+1} \ge 2c_{ij}$;
- линейной, если $c_{i-1j} + c_{i+1j} = 2c_{ij}$, $c_{ij-1} + c_{ij+1} = 2c_{ij}$.

Введем $m \times (n-1)$ – матрицу градиентов $\Delta^{\text{row}}c$ – с элементами

$$\left(\Delta^{\text{row}}c\right)_{ij} = c_{ij+1} - c_{ij}$$

и $(m-1) \times n$ – матрицу градиентов $\Delta^{\text{col}}c$ – с элементами

$$\left(\Delta^{\text{col}}c\right)_{ij} = c_{i+1j} - c_{ij}.$$

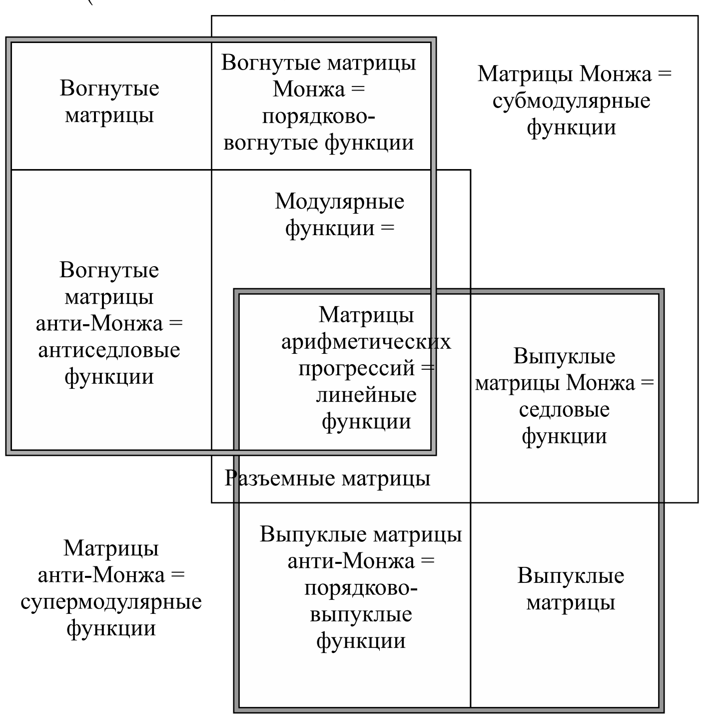
Очевидно, что обе последние матрицы есть дискретные аналоги градиентов по направлениям i и j (подробнее см. [13]).

Назовем матрицу A изотонной (антитонной), если $a_{ij} \le a_{kl}$ или $a_{ij} \ge a_{kl}$ для всех $i \le k, j \le p$, строчно-изотонной (строчно-антитонной), если дополнительно $i \equiv k$, и столбцово-изотонной (столбцово-антитонной), если дополнительно $j \equiv p$.

Функция $f : Z^n \to R$ порядково-выпуклая (порядково-вогнутая), если

$$f\left(x+\sigma_i\right) - f\left(x\right) \ge f\left(y+\sigma_i\right) - f\left(y\right) \text{ или } f\left(x+\sigma_i\right) - f\left(x\right) \le f\left(y+\sigma_i\right) - f\left(y\right)$$

для всех $x \le y$ и $1 \le i \le n$, где $\sigma_i = \left(0, \ldots, 1_i, 0, \ldots, 0\right)$ (теорию таких функций см. в [13]).



Иерархия классов порядково-выпуклых (вогнутых) функций на Z^2

Hierarchy of classes of order-convex (concave) functions on Z^2

На рисунке представлена иерархия классов введенных функций.

Опишем свойства выпуклых стоимостных матриц:

1) матрица C является субмодулярной (супермодулярной) тогда и только тогда, когда матрица градиентов $\Delta^{\text{row}}c$ есть столбцово-антитонная (столбцово-изотонная), а матрица градиентов $\Delta^{\text{col}}c$ – строчно-антитонная (строчно-изотонная);

2) матрица C является модулярной тогда и только тогда, когда будут равны и элементы каждого столбца матрицы градиентов $\Delta^{\text{row}}C$, и элементы каждой строки матрицы градиентов $\Delta^{\text{col}}C$;

3) матрица C является выпуклой (вогнутой) тогда и только тогда, когда матрица градиентов $\Delta^{\text{row}}C$ есть строчно-изотонная (строчно-антитонная) и матрица градиентов $\Delta^{\text{col}}C$ – столбцово-изотонная (столбцово-антитонная);

4) матрица C является линейной тогда и только тогда, когда будут равны и элементы каждой строки матрицы градиентов $\Delta^{\mathrm{row}}C$, и элементы каждого столбца матрицы градиентов $\Delta^{\mathrm{col}}C$;

5) матрица C является вогнуто-субмодулярной тогда и только тогда, когда матрицы градиентов $\Delta^{\mathrm{row}}C$, $\Delta^{\mathrm{col}}C$ будут антитонными (изотонными);

6) (mxn)-матрица C является матрицей Монжа (анти-Монжа) тогда и только тогда, когда функция $C(i, j) = c_{ij}$ есть субмодулярная (супермодулярная) функция на $Z^2(m, n)$. Такие матрицы называем вогнуто-субмодулярными (выпукло-супермодулярными);

7) (mxn)-матрица C имеет свойство выпуклости и свойство Монжа тогда и только тогда, когда функция $C(i, j) = c_{ij}$ определенная на $Z^2(m, n)$, является порядково-выпуклой (порядково-вогнутой).

Приведем практические примеры выпуклых стоимостных матриц:

• матрица $C = a \oplus b = (a_i + b_j)$ для всех i и j является модулярной. Если $a(i) = a_i$ и $b(j) = b_j$ есть вогнутые (выпуклые) функции, тогда $C = (a_i + b_j)$ – вогнутая (выпуклая) модулярная матрица. Более того, матрица c модулярная тогда и только тогда, когда существуют функции $a(i) = a_i$, $b(j) = b_j$ такие, что $c_{ij} = a_i \cdot b_j$ для всех i, j. В работах[1] [22; 23] показано, что задача коммивояжера и ряд ее обобщений с такими матрицами стоимостей эффективно разрешима. Точнее, ее оптимум достигается на пирамидальных циклах, которые имеют вид $(1, i_1, \ldots, i_r, n, j_1, \ldots, j_{n-r-2})$, $i_1 < \ldots < i_r$ и $j_1 > \ldots > j_{n-r-2}$;

• матрица $C = \max(a_i, b_j)$, где a_i, b_j равны 0 или 1, есть изотонная субмодулярная, если $a(i)$ и $b(j)$ – изотонные функции, и супермодулярная, если $a(i)$ и $b(j)$ – антитонные функции;

• матрица $C = (a_i \cdot b_j)$, $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, имеет свойство Монжа (субмодулярная) тогда и только тогда, когда функции $a(i)$ и $b(j)$ изотонные;

• матрица $C = (a_i \cdot b_j)$ есть строчно-выпуклая (вогнутая) тогда и только тогда, когда функция $b(j)$ есть выпуклая (вогнутая) и столбцово-выпуклая (вогнутая), тогда и только тогда, когда функция $a(i)$ есть выпуклая (вогнутая).

В. Айзенштадт и Д. Кравчук [22] еще в 1968 г. исследовали задачу коммивояжера с матрицей анти-Монжа (супермодулярной) и предложили алгоритмы сложности $O(n^2)$ ее решения. Позднее этот результат обобщался многими авторами[2] [33–34].

Порождающие конусов матриц Монжа

Для каждого из классов матриц Монжа опишем порождающие соответствующих конусов.

Модулярные матрицы. Очевидно, что неотрицательные модулярные матрицы образуют конус. Полное описание таких матриц дают их порождающие.

Матрицу $c = (c_{ij}) = (a_i \cdot b_j)$ обозначаем как $a \otimes b$, $c = (c_{ij}) = \max(a_i, b_j)$ – как $a \circledvee b$. Пусть $e_i = \sum_{j=1}^{i} \sigma_j$ и $\overline{e}_i = \sum_{j=i}^{n \text{ или } m} \sigma_j$.

Множество экстремальных лучей конуса модулярных неотрицательных матриц в зависимости от подкласса представлено в табл. 1, в которой $\overline{0} = (0, \ldots, 0)$.

Таблица 1

Экстремальные лучи (порождающие) подконусов модулярных неотрицательных матриц

Table 1

Extreme rays (generators) of subcones of convex (concave) non-negative matrices

Матрицы	Порождающие подконусов
Выпуклые	$0 \oplus (0, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, n-i)$, $0 \oplus (n-i, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, $i = 1_{1,\ldots,n}$, и их транспонированные
Выпуклые изотонные	$0 \oplus (0, \ldots, 0, 1, \ldots, n-i)$, $i = 1, \ldots, n-1$, $0 \oplus (1, \ldots, 1)$, и их транспонированные
Вогнутые	$(0, 1, \ldots, n-1) \oplus 0$, $(n-1, \ldots, 1, 0) \oplus 0$, $(0, 1(k-1), 2(k-2), \ldots, (n-k)(k-1), (n-k) \times$ $\times (k-2), \ldots, (n-k)1, 0) \oplus 0$ для всех $k = 2, \ldots, n-1$ и их транспонированные
Вогнутые изотонные	$(1, \ldots, 1) \oplus 0$, $(0, 1, \ldots, k, \ldots, k) \oplus 0$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$ и их транспонированные

[1] *Сарванов В. И.* О квадратичных задачах выбора : автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.09. Минск, 1978. 8 с.
[2] Там же.

Множество экстремальных лучей симметрических модулярных неотрицательных $(m \times n)$-матриц с различными дополнительными свойствами представлено в табл. 2.

Таблица 2

Экстремальные лучи (порождающие) подконусов симметрических модулярных неотрицательных матриц

Table 2

Extreme rays (generators) of subcones of modular non-negative matrices

Матрицы	Порождающие подконусов
Модулярные	$\sigma_i \oplus \sigma_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$
Линейные	$(1, 2, \ldots, n) \oplus (1, 2, \ldots, n)$
Изотонные	$\overline{e}_i \oplus \overline{e}_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$
Выпуклые	$(0, 0, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, n-1) \oplus (0, 0, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, n-i)$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $(n-1, n-i-1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)([n](n-i, n-i-1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ для всех $1, \ldots, n-1$
Выпуклые изотонные	$(0, 0, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, n-i) \oplus (0, 0, \ldots, 0, 1, 2, \ldots, n-i)$ для всех $i = 1, \ldots, n-1$, $e_n \oplus e_n$
Вогнутые	$(0, 1, 2, \ldots, n-1) \oplus (0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $(n-1, n-2, \ldots, 1, 0) \oplus (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, $(0, 1(i-1), 2(i-2), \ldots, (n-i)(i-1), (n-i)(i-2), \ldots, (n-i)1, 0) \oplus$ $\oplus\ (0, 1(i-1), 2(i-2), \ldots, (n-i)(i-1), (n-i)(i-2), \ldots, (n-i))$ для всех $i = 2, n-1$
Вогнутые изотонные	$(0, 1, 2, \ldots, i, i, \ldots, i) \oplus (0, 1, 2, \ldots, i, i, \ldots, i)$, $i = 1, \ldots, n-1$, $e_n \oplus e_n$

Порождающие конусов линейных матриц. Приведем описание порождающих лучей конуса неотрицательных линейных матриц (табл. 3). Обоснование вытекает из факта представимости элементов таких матриц в форме $c_{ij} = c_{11} + a(i-1) + b(j-1) + d(i-1)(j-1)$ и при этом линейная матрица c есть субмодулярная, супермодулярная или модулярная тогда и только тогда, когда $d \le 0$, $d \ge 0$, $d = 0$.

Таблица 3

Экстремальные лучи (порождающие) подконусов линейных неотрицательных матриц

Table 3

Extreme rays (generators) of subcones of linear non-negative matrices

Матрицы	Порождающие подконусов
Линейные	Субмодулярные: $(0, 1, \ldots, m-1) \otimes (n-1, n-2, \ldots, 0)$, $(m-1, m-2, \ldots, 0) \otimes (0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Супермодулярные: $(m-1, m-2, \ldots, 0) \otimes (n-1, n-2, \ldots, 0)$, $(0, 1, 2, \ldots, m-1) \otimes (0, 1, 2, \ldots, n-1)$
Линейные модулярные	$\mathbf{0} \oplus (0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $(0, 1, 2, \ldots, m-1) \oplus \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \oplus (n-1, n-2, \ldots, 0)$, $(m-1, m-2, \ldots, 0) \oplus \mathbf{0}$
Линейные субмодулярные	$(m-1, m-2, \ldots, 0) \otimes (0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $(0, 1, 2, \ldots, m-1) \otimes (n-1, n-2, \ldots, 0)$

Окончание таблицы 3
Ending table 3

Матрицы	Порождающие подконусов
Линейные субмодулярные симметрические	$(0, 1, 2, \ldots, n-1) \oplus (0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $(n-1, n-2, \ldots, 0) \oplus (n-1, n-2, \ldots, 0)$, $(n-1, n-2, \ldots, 0)$, $(0, 1, 2, \ldots, n-1) + (0, 1, 2, \ldots, n-1) \otimes (n-1, n-2, \ldots, 0)$
Линейные модулярные изотонные	$\mathbf{0} \oplus (0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $(0, 1, 2, \ldots, m-1) \oplus \mathbf{0}$, $(1, 1, \ldots, 1)$
Линейные субмодулярные изотонные	$(0, 1, 2, \ldots, m-1) \otimes (m-1, m-2, \ldots, m-n)$, $(n-1, n-1, \ldots, n-1) \otimes (0, 1, 2, \ldots, m-n)$, если $m \geq n$, или $(n-1, n-2, \ldots, n-m) \otimes (0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $(0, 1, 2, \ldots, m-1) \otimes (m-1, m-1, \ldots, m-1)$, если $m \leq n$

Порождающие конусов субмодулярных функций. Множество экстремальных лучей конуса субмодулярных неотрицательных $(m \times n)$-матриц представлено в табл. 4.

Таблица 4

Экстремальные лучи (порождающие) подконусов субмодулярных матриц

Table 4

Extreme rays (generators) of subcones of submodular matrices

Матрицы	Порождающие подконусов
Субмодулярные	$\sigma_i \oplus \mathbf{0}, i = 1, \ldots, m, \mathbf{0} \oplus \sigma_j, j = 1, \ldots, n, \overline{e}_i \otimes e_j, i = 2, \ldots, m, j = 1, \ldots, n-1,$ $e_i \otimes \overline{e}_j, i = 1, \ldots, m-1, j = 2, \ldots, n$
Изотонные субмодулярные	$\overline{e}_i \circledvee \overline{e}_j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n, (i, j) \neq (m, n)$
Изотонные симметрические субмодулярные	$\overline{e}_i \circledvee \overline{e}_j + \overline{e}_j \circledvee \overline{e}_i, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n$

Многоиндексные транспортные задачи и многомерные матрицы Монжа

Многомерная $(h_1 \times \ldots \times h_n)$-матрица $c = \left(c_{i_1, \ldots, i_n}\right)$ называется:

- субмодулярной, если $c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_n} \leq c_{i_1, \ldots, i_s i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1}, \ldots, i_n}$;
- супермодулярной, если $c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_n} \geq c_{i_1, \ldots, i_s i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1}, \ldots, i_n}$;
- модулярной, если $c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_n} = c_{i_1, \ldots, i_s i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1}, \ldots, i_n}$;
- выпуклой, если $c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_s + 1, \ldots, i_n} \leq 2c_{i_1, \ldots, i_n}$;
- вогнутой, если $c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_s + 1, \ldots, i_n} \geq 2c_{i_1, \ldots, i_n}$;
- линеарной, если $c_{i_1, \ldots, i_s - 1, i_{s+1} - 1, \ldots, i_n} + c_{i_1, \ldots, i_s + 1, \ldots, i_n} = 2c_{i_1, \ldots, i_n}$.

Если в многоиндексной транспортной задаче с аксиальными суммами

$$\min \sum_{i_1 = 1}^{h_1} \sum_{i_2 = 2}^{h_2} \ldots \sum_{i_n = 1}^{h_n} c_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1, \ldots, i_n},$$

$$\sum_{\substack{i, \ldots, i_n \\ i_k \neq q}} x_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = a_q^k \text{ для всех } k = 1, \ldots, n, q = 1, \ldots, h_k,$$

стоимостная матрица есть матрица Монжа, то оптимальный план сформулированной задачи находит лексикографический градиентный алгоритм [35]. Другие обобщения многоиндексных транспортных задач проанализированы в [9; 10].

Полиматроидность транспортной задачи

Многогранник $P(r)$ в R^n, задаваемый условиями

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \le r(I) \text{ для всех } I \subseteq \{1, \ldots, n\},$$

$$x_i \ge 0, \ i = 1 - n,$$

называется полиматроидом, если $r(I)$ – субмодулярная функция, т. е.

$$r(A) + r(B) \le r(A \cap B) + r(A \cup B).$$

Очевидно, что если $r(I) \equiv 1$, то $P(r)$ – симплекс, если $r(I) = \sum_{i \in I} c_i$ – линейная функция, то $P(r)$ – параллелепипед со стороной c_i. Легко проверяется, что ограничения классической транспортной задачи есть пересечение двух полиматроидов [13]:

$$P_1 = \left\{ (x_{ij})_{mxn} : x_{ij} \ge 0, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, \ldots, m \right\},$$

$$P_2 = \left\{ (x_{ij})_{mxn} : x_{ij} \ge 0, \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le b_j, j = 1, \ldots, n \right\}.$$

Полиматроиды интересны тем, что градиентное решение x^g будет оптимальным в задаче максимизации линейной функции на таком множестве. Более того, если допустимая область есть пересечение k-полиматроидов, то

$$\frac{c(x^9)}{c(x^{\text{опт}})} \ge \frac{1}{k},$$

т. е. градиентное решение в любой транспортной задаче максимизации дохода транспортной компании будет иметь точность не менее $\frac{1}{2}$, или 50 %. Более того, если субмодулярная функция $r(I)$ принимает целые значения, то и в задаче максимизации $\sum\sum f_{ij}(x_{ij})$ на целых точках полиматроида $P(r)$ при порядково-выпуклых функциях $f_{ij}(x_{ij})$ градиентное решение, полученное алгоритмом покоординатного подъема, будет оптимальным, а в задаче на пересечении k таких полиматроидов точность составит $\frac{1}{k}$ [13].

Современный программный инструментарий транспортной оптимизации

Лучшие коммерческие программные продукты транспортной логистики носят универсальный характер и решают задачи со многими обременяющими ограничениями. Наиболее известны следующие: CPLEX (*ILOG Inc.*), OSL (*IBM Corporation*), XPRESS-MP (*Dash Assotiated Ltd.*), LINDO (*LINDO Systems Inc.*), MIPCL (разработчик – сотрудник БГУ Писарук Н. Н., система приобретена и распространяется HUAWEI, она подробно описана в монографии [35]). Проведены сравнения коммерческих общих систем оптимизации [36], а также специальных транспортных[3].

Небольшие транспортные задачи с десятками поставщиков и потребителей можно решать и простыми универсальными средствами: MSExcel, MAPLE (библиотека *Simplex*), MathCad. Современные версии практических транспортных задач можно найти в [37–39].

[3]A tutorial on top commercial mathematical programming solvers and its applications to bi-level programming optimization problems in transportation [seminar] // Centre for Maritime Studies of Singapore. 2014.

Библиографические ссылки

1. Monge G. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. In: *Mémoires de l'Academie.* Paris: De l'Imprimerie Royale; 1781. p. 666–704.
2. Толстой АН. Методы нахождения суммового километража при планировании перевозок в пространстве. *Планирование перевозок.* 1930;1:23–55.
3. Канторович ЛВ. О перемещении масс. *Доклады АН СССР.* 1942;32(3):227–229.
4. Канторович ЛВ, Гавурин МК. Применение математических методов в вопросе анализа грузопотоков. В: Звонков ВВ, редактор. *Проблемы повышения эффективности работы транспорта.* Москва: АН СССР; 1949. с. 110–138.
5. Hitchcock FL. The distribution of a product from several sources to numerous localities. *Journal of Mathematics and Physics.* 1941;20(1–4):224–230. DOI: 10.1002/sapm1941201224.
6. Koopmans TC. Optimum utilisation of the transportation system. *Econometrica.* 1949:17 (supplement):136–146. DOI: 10.2307/1907301.
7. Dantzig G. Application of the simplex method to a transportation problem. In: Koopmans TC, editor. *Activity analysis of production and allocation.* New York: John Wiley and Sons; 1951. p. 359–377.
8. Ford L, Fulkerson D. *Flows in networks.* Princeton: Princeton University Press; 1962. 194 p.
9. Емеличев ВА, Ковалев ММ, Кравцов МК. *Многогранники, графы, оптимизация.* Москва: Наука; 1981. 344 с.
10. Yemelichev VA, Kovalev MM, Kravtsov MK. *Polytopes, graphs and optimisation.* Cambridge: Cambridge University Press; 1984. 423 p.
11. Богачев ВН, Колесников АВ. Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы. *Успехи математических наук.* 2012;67(5):3–110. DOI: 10.4213/rm9490.
12. Hoffman A. On simple linear programming problems. In: Klee V, editor. *Convexity: proceedings of the seventh symposium in pure mathematics AMS; 1961 June 13–15; Washington, USA. Volume 7.* Providence: American Mathematical Society; 1963. p. 317–327.
13. Ковалев М. *Матроиды в дискретной оптимизации.* Минск: Университетское; 1987. 220 с.
14. Bein W, Brucker P, Hoffman A. Series parallel composition of greedy linear programming problems. *Mathematical Programming.* 1993;62:1–14. DOI: 10.1007/BF01585157.
15. Bein WW, Brucker P, Park J, Pathak P. A Monge property for the d-dimensional transportation problem. *Discrete Applied Mathematics.* 1995;58:97–109.
16. Dietrich BL. Monge sequences, antimatroids, and the transportation problem with forbidden arcs. *Linear Algebra and its Applications.* 1990;139:133–145. DOI: 10.1016/0024-3795(90)90393-Q.
17. Shamir R. A fast algorithm for constructing Monge sequences in transportation problems with forbidden arcs. *Discrete Mathematics.* 1993;114(1–3):435–444. DOI: 10.1016/0012-365X(93)90382-4.
18. Adler I, Hoffman A, Schamir R. Monge and feasibility sequences in general flow problems. *Discrete Applied Mathematics.* 1993;44(1–3):21–38. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90220-I.
19. Park JK. A special case of the n-vertex traveling-salesman problem that can be solved in O(n) time. *Informating Processiong Letters.* 1991;40(5):247–254. DOI: 10.1016/0020-0190(91)90118-2.
20. Береснев ВЛ. Гимади ЭХ, Дементьев ВТ. *Экстремальные задачи стандартизации.* Новосибирск: Наука; 1978. 333 с.
21. Трубин В. Эффективный алгоритм определения местоположения в древовидной сети. *Доклады АН УССР.* 1976;231:547–550.
22. Айзенштат В, Кравчук Д. Алгоритм нахождения экстремума линейной формы на множестве циклов в специальном случае. *Доклады АН БССР.* 1968;12:401–404.
23. Демиденко В. Задача коммивояжера с асимметричными матрицами. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-технических наук.* 1978;1:29–35.
24. Трубин В. Два класса задач определения местоположения в древовидных сетях. *Кибернетика.* 1983;4:84–87.
25. Гимади ЭХ. Эффективный алгоритм решения задачи определения местоположения с областью обслуживания, связанной относительно ациклической сети. *Управляемые системы.* 1979;19:3–13.
26. Aggarwal A, Bar-Noy A, Khuller S, Kravets D, Schieber B. Efficient minimum cost matching using quadrangle inequality. In: *Proceedings of 33rd annual symposium on foundations of computer science; 1992 October 24–27; Pittsburgh, USA.* Washington: Institute of Electrical and Electronics Engineers; 1992. p. 583–592. DOI: 10.1109/SFCS.1992.267793.
27. Girlich E, Kovalev M, Moshchensky A. *Conventy and Monge arrays.* Magdeburg University [Preprint]. 1993;12:[22].
28. Girlich E, Kovalev M, Zaporozhets A. *Subcones of submodular functions.* Otto von Guericke Universität Magdeburg [Preprint]. 1994;29:[28].
29. Демиденко ВМ. Коническая характеризация матриц Монжа. *Кибернетика и системный анализ.* 2004;4:87–98.
30. Гришухин В. *Экстремальные лучи конуса субмодулярной функции.* ЦЭМИ АН УССР [Препринт]; 1982. [66 с.].
31. Rudolf R, Woeginger GJ. The cone of Monge matrices: extremal rays and applications. *Zeitschrift für Operations Research.* 1995;42:161–168. DOI: 10.1007/BF01415751.
32. Burkard RE, Klinz B, Rudolf R. Perspectives of Monge properties in optimisation. *Discrete Applied Mathematics.* 1996; 70(2):95–161. DOI: 10.1016/0166-218X(95)00103-X.
33. Дейнеко В, Филоненко В. О восстановлении матриц специальной структуры. В: Чернышенко ВМ, редактор. *Актуальные проблемы ЭВМ и программирования.* Днепропетровск: Днепровский гуманитарный университет; 1979. с. 43–45.
34. Deineko V, Woeginger G. Some problems around travelling salesmen, dartboards, and euro-coins. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science.* 2006;90:43–52.
35. Писарук НН. *Модели и методы смешанно-целочисленного программирования.* Минск: БГУ; 2010. 230 с.
36. Meindl B, Templ M. *Analysis of commercial and free and open source solvers for linear optimisation problems.* Wien: Technische Universität Wien; 2012. 15 p.
37. Бродецкий ГЛ, Гусев ДА. *Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации.* Москва: Академия; 2012. 195 с.

38. Гасников АВ, редактор. *Введение в математические моделирование транспортных потоков*. 2-е издание. Москва: МЦНМО; 2013. 428 с.
39. Самойленко НИ, Кобец АА. *Транспортные системы большой размерности*. Харьков: НТМТ; 2010. 214 с.

References

1. Monge G. Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. In: *Mémoires de l'Academie.* Paris: De l'Imprimerie Royale; 1781. p. 666–704.
2. Tolstoi AN. [Methods of finding the total mileage when planning transportation in space]. *Planirovanie perevozok.* 1930;1: 23–55. Russian.
3. Kantorovich LV. On the displacement of masses. *USSR Academy of Sciences.* 1942;32(3):227–229. Russian.
4. Kantorovich LV, Gavurin MK. [Application of mathematical methods in the analysis of cargo flows]. In: Zvonkov VV, editor. *Problemy povysheniya effektivnosti raboty transporta* [Problems of improving the efficiency of transport]. Moscow: AN SSSR; 1949. p. 110–138. Russian.
5. Hitchcock FL. The distribution of a product from several sources to numerous localities. *Journal of Mathematics and Physics.* 1941;20(1–4):224–230. DOI: 10.1002/sapm1941201224.
6. Koopmans TC. Optimum utilisation of the transportation system. *Econometrica.* 1949:17(supplement):136–146. DOI: 10.2307/1907301.
7. Dantzig G. Application of the simplex method to a transportation problem. In: Koopmans TC, editor. *Activity analysis of production and allocation.* New York: John Wiley and Sons; 1951. p. 359–377.
8. Ford L, Fulkerson D. *Flows in networks.* Princeton: Princeton University Press; 1962. 194 p.
9. Emelichev VA, Kovalev MM, Kravtsov MK. *Mnogogranniki, grafy, optimizatsiya* [Polytopes, graphs and optimisation]. Moscow: Nauka; 1981. 344 p. Russian.
10. Yemelichev VA, Kovalev MM, Kravtsov MK. *Polytopes, graphs and optimisation.* Cambridge: Cambridge University Press; 1984. 423 p. Russian.
11. Bogachev VN, Kolesnikov AV. [The task of Monge – Kantorovich: achievements, connections and prospects]. *Uspekhi matematicheskikh nauk*. 2012;67(5):3–110. Russian. DOI: 10.4213/rm9490.
12. Hoffman A. On simple linear programming problems. In: Klee V, editor. *Convexity: proceedings of the seventh symposium in pure mathematics AMS; 1961 June 13–15; Washington, USA. Volume 7.* Providence: American Mathematical Society; 1963. p. 317–327.
13. Kovalev M. *Matroidy v diskretnoi optimizatsii* [Matroids in discrete optimisation]. Minsk: Universitetskoe; 1987. 220 p. Russian.
14. Bein W, Brucker P, Hoffman A. Series parallel composition of greedy linear programming problems. *Mathematical Programming.* 1993;62:1–14. DOI: 10.1007/BF01585157.
15. Bein WW, Brucker P, Park J, Pathak P. A Monge property for the d-dimensional transportation problem. *Discrete Applied Mathematics*. 1995;58:97–109.
16. Dietrich BL. Monge sequences, antimatroids, and the transportation problem with forbidden arcs. *Linear Algebra and its Applications.* 1990;139:133–145. DOI: 10.1016/0024-3795(90)90393-Q.
17. Shamir R. A fast algorithm for constructing Monge sequences in transportation problems with forbidden arcs. *Discrete Mathematics.* 1993;114(1–3):435–444. DOI: 10.1016/0012-365X(93)90382-4.
18. Adler I, Hoffman A, Schamir R. Monge and feasibility sequences in general flow problems. *Discrete Applied Mathematics.* 1993;44(1–3):21–38. DOI: 10.1016/0166-218X(93)90220-I.
19. Park JK. A special case of the n-vertex traveling-salesman problem that can be solved in O(n) time. *Informating Processiong Letters.* 1991;40(5):247–254. DOI: 10.1016/0020-0190(91)90118-2.
20. Beresnev VL, Gimadi EKh, Dement'ev VT. *Ekstremal'nye zadachi standartizatsii* [Extreme problems of standardisation]. Novosibirsk: Nauka; 1978. 333 p. Russian.
21. Trubin V. [Effective algorithm for determining the location in a tree network]. *Doklady AN USSR*. 1976;231:547–550. Russian.
22. Eisenstatt V, Kravchuk D. [Algorithm for finding the extremum of a linear form on a set of cycles in a special case]. *Doklady AN BSSR.* 1968;12:401–404. Russian.
23. Demidenko V. [The problem of a traveling salesman with symmetric matrices]. *Izvestiya Natsional'noi akademii nauk Belarusi. Seriya fiziko-tekhnicheskikh nauk*. 1978;1:29–35. Russian.
24. Trubin V. [Two classes of location determination problems in tree networks]. *Kibernetika.* 1983;4:84–87. Russian.
25. Gimadi EKh. [An effective algorithm for solving the problem of determining the location with the service area associated with an acyclic network]. *Upravlyaemye sistemy.* 1979;19:3–13. Russian.
26. Aggarwal A, Bar-Noy A, Khuller S, Kravets D, Schieber B. Efficient minimum cost matching using quadrangle inequality. In: *Proceedings of 33rd annual symposium on foundations of computer science; 1992 October 24–27; Pittsburgh, USA*. Washington: Institute of Electrical and Electronics Engineers; p. 583–592. 1992. DOI: 10.1109/SFCS.1992.267793.
27. Girlich E, Kovalev M, Moshchensky A. *Conventy and Monge arrays.* Magdeburg University [Preprint]. 1993;12:[22].
28. Girlich E, Kovalev M, Zaporozhets A. *Subcones of submodular functions.* Otto von Guericke Universität Magdeburg [Preprint]. 1994;29:[28].
29. Demidenko VM. [Conic characterisation of Monge matrices]. *Kibernetika i sistemnyi analiz*. 2004;4:87–98. Russian.
30. Grishukhin V. *Ekstremal'nye luchi konusa submodulyarnoi funktsii* [Extremal rays of the cone of a submodular function]. CEMI of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR [Preprint]; 1982. [66 p.]. Russian.
31. Rudolf R, Woeginger GJ. The cone of Monge matrices: extremal rays and applications. *Zeitschrift für Operations Research.* 1995;42:161–168. DOI: 10.1007/BF01415751.
32. Burkard RE, Klinz B, Rudolf R. Perspectives of Monge properties in optimization. *Discrete Applied Mathematics.* 1996; 70(2):95–161. DOI: 10.1016/0166-218X(95)00103-X.
33. Deineko V, Filonenko V. [On the reconstruction of special structured matrices]. In: Chernyshenko VM, editor. *Aktual'nye problemy EVM i programmirovaniya* [Actual problems of computers, programming]. Dnepropetrovsk: Dnipropetrovsk Humanitarian University; 1979. p. 43–45. Russian.

34. Deineko V, Woeginger G. Some problems around travelling salesmen, dartboards, and euro-coins. *Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science*. 2006;90:43–52.

35. Pisaruk NN. *Modeli i metody smeshanno-tselochislennogo programmirovaniya* [Models and methods of mixed-integer programming]. Minsk: Belarusian State University; 2010. 230 p. Russian.

36. Meindl B, Templ M. *Analysis of commercial and free and open source solvers for linear optimization problems.* Wien: Technische Universität Wien; 2012. 15 p.

37. Brodetskii GL, Gusev DA. *Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli v logistike: protsedury optimizatsii* [Economic and mathematical methods and models in logistics: optimisation procedures]. Moscow: Akademiya; 2012. 195 p. Russian.

38. Gasnikov AV, editor. *Vvedenie v matematicheskie modelirovanie transportnykh potokov* [Introduction to mathematical modeling of transport flows]. 2nd edition. Moscow: Moscow Centre for Continuous Mathematical Education; 2013. 428 p. Russian.

39. Samoilenko NI, Kobets AA. *Transportnye sistemy bol'shoi razmernosti* [Transport systems of large dimension]. Kharkiv: NTMT; 2010. 214 p. Russian.

Статья поступила в редколлегию 26.02.2021.
Received by editorial board 26.02.2021.