Математические заметки

Том 92 выпуск 6 декабрь 2012

УДК 515.124.62, 515.122.4

Задача о распространении накрывающей гомотопии для компактных групп преобразований

С. М. Агеев, Д. Реповш

Показано, что пространство орбит универсальных (в смысле Пале) G-пространств осуществляет классификацию G-пространств. Доказаны теоремы о распространении накрывающей гомотопии для G-пространств и о гомотопическом представлении изовариантной категории ISOV.

Библиография: 17 названий.

Введение

В работе изучается изовариантная категория ISOV, объектами которой являются пространства с действием компактной группы G, а морфизмами – изовариантные отображения. Исторически принято рассматривать объекты этой категории как обобщенные главные G-расслоения, а ее инъективные объекты ($\equiv$ Isov-AE-пространства) – как универсальные обобщенные главные G-расслоения. Впервые объекты с похожими свойствами были построены Пале для компактных групп Ли, действующих на конечномерных пространствах с конечным числом орбитных типов [1; § 2.6.]. В дальнейшем этот результат был распространен на компактные метризуемые группы, действующие на пространствах с конечномерным пространством орбит [2]. В работе [3] были сняты последние ограничения и устанавлена теорема существования Isov-AE-пространств.

Теорема 1. *Пусть для всех* $i \geqslant 1$ Equiv-AE-*пространство* $\mathbb{X}_i$ *является* Isov-*порождающим пространством. Тогда*

$$\prod\{\mathbb{X}_i \mid i \geqslant 1\} \in \text{Isov-AE}.$$

Пространство $\mathbb{X}$ называется Isov-*порождающим*, если для любого метрического G-пространства $\mathbb{Z}$ существует изовариантное отображение $\eta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$. В статье [4] доказано, что счетная степень $\mathbb{J} \rightleftharpoons (\operatorname{Con}\mathbb{T})^\omega$ метрического конуса $\operatorname{Con}\mathbb{T}$ над дискретным объединением $\mathbb{T}$ всех однородных пространств $G/H \in G$-ANE является Isov-порождающим (см. также [5]). Так как $\mathbb{J}$ является также Equiv-AE-пространством и $\mathbb{J} \cong \mathbb{J}^\omega$, то из теоремы 1 следует $\mathbb{J} \in$ Isov-AE.

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь. Работа второго автора выполнена при поддержке Slovenian Research Agency (гранты P1-0292-0101, J1-9643-0101, J1-2057-0101).

Каждое семейство $\mathcal{F}$, лежащее в множестве Conj_G сопряженных классов замкнутых подгрупп G, порождает ряд эквивариантных гомотопических инвариантов: $\mathcal{F}$-классифицирующее G-пространство в смысле [6], [7] и тесно связанные с ними обобщенные когомологии групп [8], [9], фундаментальные классы G-пространств и другие эквивариантные гомотопические инварианты [10]. Теорема 1 позволяет установить, что в $\mathcal{F}$-классифицирующих G-пространствах может быть введена дополнительная структура изовариантных абсолютных экстензоров, что дает новые возможности для вычисления гомотопических инвариантов пространств орбит $\mathcal{F}$-классифицирующих G-пространств. В свою очередь это дает важную информацию об обобщенных когомологиях компактных групп.

Теорема 1 влечет также важный вывод о том, что эквивариантный гомотопический тип Equiv-ANE-пространств совпадает с изовариантным гомотопическим типом Isov-ANE-пространств. Это позволяет прояснить функториальную природу операции перехода к пучку орбит данного типа, которая не сохраняется при эквивариантных гомотопических эквивалентностях. Очерченному кругу вопросов будут посвящены последующие публикации (см., например, [3]).

Здесь же мы с помощью теоремы 1 устанавливаем, что пространство орбит E любого Isov-AE-пространства $\mathbb{E}$ осуществляет классификацию G-пространств в смысле Р. Пале. Для этого мы переносим на произвольные компактные группы классический результат Пале о накрывающей гомотопии (см. [1], а также [2]), а также доказываем более общий результат – теорему 2 о распространении накрывающей гомотопии. Вследствие этого категория ISOV допускает гомотопическое представление, во многих отношениях сводящее ее изучение к гомотопическим свойствам топологических пространств – теорема 5.

Постановка задачи о распространении накрывающей гомотопии. Пусть G есть компактная группа. Рассмотрим квадратную коммутативную G-диаграмму $\mathcal{D}$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}\times[0,1]\cup\mathbb{T}\times\{0\} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & \mathbb{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{T}\times[0,1] \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Y} \end{tikzcd}$$

в которой $\mathbb{S}\subset\mathbb{T}$ есть замкнутая G-подпространство, а f, φ и ψ суть G-отображения. Скажем, что диаграмма $\mathcal{D}$ является *подходящей* (соответственно: является *слабо подходящей*) для G-отображения f, если

(a) φ является изовариантным отображением (соответственно: также ψ индуцирует гомоморфизм $\psi\colon T\times[0,1]\to Y$ пространств орбит);

(b) $(f^{-1}\circ\psi)(G(u)\times I)$ имеет одноорбитный тип (G_u) для всех $u\in T$.

Для подходящей коммутативной диаграммы $\mathcal{D}$ справедливо следующее:

(1) орбитные типы пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{T}$ связаны соотношением $\mathrm{Orb}_{\mathbb{T}}\subset\mathrm{Orb}_{\mathbb{X}}$;

(2) если отображение f является изовариантным, то отображение ψ тоже является изовариантным.

Если $\mathcal{D}$ является слабо подходящей диаграммой, а f есть P-орбитная проекция, то

(3) индуцированное отображение $\psi_P\colon\mathbb{T}/P\times[0,1]\to\mathbb{Y}$, задаваемое формулой $(\psi_P)(P\cdot u,t)=\psi(u,t)$, корректно определено и является изовариантным вложением.

Скажем, что G-отображение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{T}\times[0,1]\to\mathbb{X}$ *расщепляет диаграмму* $\mathcal{D}$, если $\widehat{\varphi}$ есть поднятие ψ относительно f (т.е. $f\circ\widehat{\varphi}=\psi$) и $\widehat{\varphi}=\operatorname{ext}\varphi$. В силу (b) отображение $\widehat{\varphi}$ необходимо является изовариантным.

Скажем, что *задача о распространении изовариантной накрывающей гомотопии* (*коротко*, ЗРНГ) *для G-отображения $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ разрешима* (*слабо разрешима*), если любая подходящая G-диаграмма (слабо подходящая G-диаграмма) $\mathcal{D}$ для f допускает расщепление. В этом случае будем говорить, что G-отображение $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ является Isov*-расслоением Гуревича* (*слабым* Isov*-расслоением Гуревича*). Ясно, что любое Isov-расслоение Гуревича является слабым Isov-расслоением Гуревича. Следующий результат является главным в работе.

Теорема 2. *Любая орбитная проекция $p\colon\mathbb{X}\to X$ является* Isov*-расслоением Гуревича.*

Если теперь применить критерий эквиморфности к изовариантному отображению $\widehat{\varphi}$, расщепляющему G-диаграмму $\mathcal{D}$, в которой отсутствует $\mathbb{S}$, то получим распространение на произвольные компактные группы известной теоремы Пале об эквивариантном типе пространства, имеющем орбитный тип произведения $\mathbb{W}\times[0,1]$ (см. [1]).

Доказательство теоремы 2 основывается на следующем результате, имеющим и самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть $\pi\colon G\to H$ есть эпиморфизм компактных групп, ядро $P=\operatorname{Ker}\pi$ которого является группой Ли. Тогда любая P-орбитная проекция $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}=\mathbb{X}/P$ является* Isov*-расслоением Гуревича.*

Для редуцирования теоремы 2 к теореме 3 разложим G-пространство $\mathbb{X}$ в ряд Ли $\{\mathbb{X}_\alpha,\pi_\alpha^\beta\}$. Так как $P_\alpha/P_{\alpha+1}$ есть компактная группа Ли, то в силу теоремы 3 $P_\alpha^{\alpha+1}$-орбитная проекция $\pi_\alpha^{\alpha+1}\colon\mathbb{X}_{\alpha+1}\to\mathbb{X}_\alpha$ является Isov-расслоением Гуревича для всех $\alpha<\tau$. Рассуждая далее по трансфинитной индукции, получим, что предельная орбитная проекция $\pi\colon\mathbb{X}\to X$ тоже является Isov-расслоением Гуревича.

Гомотопическое представление категории ISOV**.** На пространстве орбит X G-пространства $\mathbb{X}$ будем рассматривать *стратификацию* $\{X_{(H)}\mid H<G\}$, порожденную орбитными типами (при этом само X будем называть *$\mathcal{S}$-пространством*); отображение $\alpha\colon X\to E$ $\mathcal{S}$-пространств назовем *сохраняющим стратификацию* (*или кратко*, *$\mathcal{S}$-отображением*), если

$$\alpha(X_{(H)})\subset E_{(H)}\qquad \text{для любой подгруппы}\quad H<G.$$

Аналогично определяется *$\mathcal{S}$-гомотопия* $H\colon X\times I\to E$ между отображениями, сохраняющими стратификацию (т.е. $H(X_{(H)}\times I)\subset E_{(H)}$ для любой $H<G$).

Послойным произведением пространств C и B относительно отображений $C\xrightarrow{g}A$ и $B\xrightarrow{f}A$ называется подмножество

$$\{(c,b)\mid g(c)=f(b)\}\subset C\times B,$$

которое обозначается через $C_g\times_f B$, или кратко $g^*(B)$ или $f^*(C)$. Проектирования $D=C_g\times_f B$ на сомножители C и B определяют отображения $f^*\colon D\to C$ и $g^*\colon D\to B$. Будем f^* называть *отображением, параллельным* f, а g^* – *отображением, параллельным* g.

Критерий эквиморфности (предложение 2) позволяет связать изовариантные отображения с послойными произведениями.

Предложение 1. *Пусть* $h\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ *есть изовариантное отображение*, $\widetilde{h}\colon Y \to X$ – *отображение пространств орбит, порожденное* h. *Тогда* G-*отображение* h *и* G-*отображение* $(\widetilde{h})^*\colon (\widetilde{h})^*(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$, *параллельное* $\widetilde{h}$, *эквиморфны, т.е. существует такое* G-*отображение* $\theta\colon (\widetilde{h})^*(\mathbb{X}) \to \mathbb{Y}$, *что* $h \circ \theta = (\widetilde{h})^*$ (*тем самым,* $\mathbb{Y}$ *отождествляется с послойным произведением* $\widetilde{h}^*(\mathbb{X})$).

С помощью теоремы 2 и предложения 1 устанавливается эквиморфность G-пространств, индуцированных $\mathcal{S}$-отображениями, которые соединяются $\mathcal{S}$-гомотопией:

Теорема 4. *Если* $\mathcal{S}$-*отображения* $\alpha\colon X \to E$ *и* $\beta\colon X \to E$ *соединяются* $\mathcal{S}$-*гомотопией, то послойные произведения*

$$\alpha^*(\mathbb{E}) = \mathbb{E}_\pi \times_\alpha X \qquad \text{и} \qquad \beta^*(\mathbb{E}) = \mathbb{E}_\pi \times_\beta X$$

эквиморфны (здесь $\pi\colon \mathbb{E} \to E$ *есть орбитная проекция).*

Если G-*пространство* $\mathbb{E}$ *есть* Isov-AE, *то верно и обратное: если* $\alpha^*(\mathbb{E}) \cong_G \beta^*(\mathbb{E})$, *то* $\mathcal{S}$-*отображения* $\alpha\colon X \to E$ *и* $\beta\colon X \to E$ *соединяются* $\mathcal{S}$-*гомотопией.*

Через $\mathcal{S}$-HOMOT$_E$ обозначим категорию, *объектами* которой являются $\mathcal{S}$-гомотопические классы $[\alpha]\colon X \to E$ $\mathcal{S}$-отображений, а *морфизм* между $\mathcal{S}$-отображениями $[\alpha]$, $[\beta]\colon Y \to E$ есть $\mathcal{S}$-гомотопический класс такого $\mathcal{S}$-отображения $h\colon X \to Y$, что $\alpha = \beta \circ h$.

Сопоставим объекту $[\alpha]\colon X \to E$ категории $\mathcal{S}$-HOMOT$_E$ G-пространство, совпадающее с послойным произведением $\mathbb{X} \rightleftharpoons \alpha^*(\mathbb{E})$, а морфизму $[h]\colon X \to Y$ – изовариантное отображение

$$[h]_*\colon \mathbb{X} = \alpha^*(\mathbb{E}) \to \mathbb{Y} \rightleftharpoons \beta^*(\mathbb{E}), \qquad [h]_*(x,e) = (h(x),e).$$

Из теоремы 4 легко следует, что так построенный ковариантный функтор Φ при определенных условиях осуществляет изоморфизм изовариантной гомотопической категории ISOV-HOMOT и $\mathcal{S}$-HOMOT$_E$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbb{E}$ *есть* Isov-AE-*пространство. Тогда*

$$\Phi\colon \mathcal{S}\text{-HOMOT}_E \to \text{ISOV-HOMOT}$$

есть эквивалентность категорий.

Теорему 5 можно рассматривать как дополнительный аргумент в защиту тезиса о том, что изовариантная категория представляет собой обобщение категории главных G-расслоений.

1. Предварительные сведения и результаты

Везде в дальнейшем пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений и если не оговорено противное, предполагаются метрическими (непрерывными); рассматриваются только действия компактных групп.

Приведем основные понятия теории G-пространств [11]. Под действием компактной группы G на пространстве $\mathbb{X}$ понимается непрерывное отображение μ из произведения $G \times \mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$, для которого

$$\mu(g, \mu(h, x)) = \mu(g \cdot h, x), \quad \mu(e, x) = x \qquad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{X}, \quad g, h \in G$$

(здесь e – единица группы G). Как правило, вместо $\mu(g, x)$ будем писать $g \cdot x$, или просто gx. Пространство $\mathbb{X}$ с действием группы G называется *G-пространством.* Отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ двух G-пространств называется *G-отображением* или *эквивариантным отображением*, если $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ для всех $x \in \mathbb{X}$, $g \in G$.

Заметим, что G-пространства и G-отображения образуют категорию, которую мы обозначим через G-TOP или EQUIV, если ясно о какой группе G идет речь. Мы свободно будем использовать символ “G-” или “Equiv-”, означающий *эквивариантный.* Если “$***$” есть известное понятие из неэквивариантной топологии, то “G-$***$” или “Equiv-$***$” обозначает соответствующий эквивариантный аналог.

Орбитой $G(x)$ точки $x \in \mathbb{X}$ называется подмножество $\{g \cdot x \mid g \in G\} = G \cdot x$, являющееся замкнутым. Естественное отображение

$$\pi = \pi_{\mathbb{X}}\colon \mathbb{X} \to X, \qquad x \mapsto G(x),$$

пространства $\mathbb{X}$ в пространство фактор-разбиения $X \rightleftharpoons \mathbb{X}/G$ назовем *орбитной проекцией.* Пространство фактор-разбиения X, наделенное факторной топологией, порожденное π, будем называть *пространством орбит.* Подмножество A называется *инвариантным* или *G-подмножеством*, если $\pi^{-1}\pi(A) = G \cdot A$.

Через Conj_G обозначим множество всех классов сопряженности замкнутых подгрупп G, а через Orb_G – семейство всех однородных пространств с точностью до эквиморфности. Если ввести на этих множествах частичный порядок:

$$\begin{aligned} (K) \leqslant (H) \quad &\Longleftrightarrow \quad K \text{ содержится в некотором представителе } H' \text{ класса } (H),\\ G/K \geqslant G/H \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{существует эквивариантное отображение } f\colon G/K \to G/H, \end{aligned}$$

то биекция

$$(H) \in \mathrm{Conj}_G \mapsto G/H \in \mathrm{Orb}_G$$

обращает этот порядок. С учетом этого мы будем (там, где не возникает двусмысленности) эти множества отождествлять и использовать единое название – *множество G-орбитных типов* и единое обозначение – Orb_G.

Для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ следующее подмножество:

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

является замкнутой подгруппой в группе G и называется *стабилизатором точки x.* Для любой замкнутой подгруппы $H < G$ введем в рассмотрение следующие подмножества $\mathbb{X}$:

- $\mathbb{X}^H = \{x \in \mathbb{X} \mid H \cdot x = x\} = \{x \in \mathbb{X} \mid H \subset G_x\}$ (*множество H-неподвижных точек*);
- $\mathbb{X}_H = \{x \in \mathbb{X} \mid H = G_x\}$;
- $\mathbb{X}_{(H)} = \{x \in \mathbb{X} \mid H$ сопряжена с $G_x\}$ (*пучок орбит типа* (H)).

Через $\mathrm{Orb}_{\mathbb{X}}$ обозначим $\{(G_x) \mid x \in \mathbb{X}\} \subset \mathrm{Orb}_G$ – *семейство орбитных типов* $\mathbb{X}$.

Эквивариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется *изовариантным*, если f сохраняет стабилизаторы, т.е. $G_x = G_{f(x)}$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Категорию, образованную G-пространствами и изовариантными отображениями, обозначим через ISOV (всегда будет ясно о какой группе G идет речь). Следующий факт – *критерий эквиморфности* – широкоизвестен (см. [11; глава 1, пример 10]).

Предложение 2. *Изовариантное непрерывное отображение является гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда порожденное им отображение орбит является гомеоморфизмом.*

Рассмотрим компактную группу G и метрическое H-пространство $\mathbb{Y}$, где $H < G$, а также диагональное действие $h \cdot (g, y) \rightleftharpoons (g \cdot h^{-1}, h \cdot y)$ группы H на произведении $G \times \mathbb{Y}$. Обозначим через $[g, y]$ элемент

$$H \cdot (g, y) = \{(g \cdot h^{-1}, h \cdot y) \mid h \in H\}$$

пространства орбит $(G \times \mathbb{Y})/H$. Формулой

$$g_1 \cdot [g, y] = [g_1 \cdot g, y], \qquad \text{где} \quad g, g_1 \in G, \quad y \in \mathbb{Y},$$

корректным образом задается непрерывное действие G на $(G \times \mathbb{Y})/H$, которое называется *скрученным произведением* и обозначается через $G \times_H \mathbb{Y}$. Любое G-пространство $\mathbb{A}$, допускающее G-отображение $\alpha\colon \mathbb{A} \to G/H$ в однородное пространство, эквиморфно скрученному произведению $G \times_H \mathbb{S}$, где $\mathbb{S} \rightleftharpoons \alpha^{-1}([H])$ есть H-пространство, поскольку непрерывное G-отображение $\varphi\colon G \times_H \mathbb{S} \to \mathbb{A}$, заданное формулой $\varphi([g, s]) = g \cdot s$, является эквиморфизмом. Доказательство следующего факта мы оставляем читателю.

Лемма 1. *Пусть G-орбитный тип скрученного произведения $G \times_H \mathbb{S}$ одноэлементен. Если пространство орбит $\mathbb{S}/H$ связно, то H-орбитный тип $\mathbb{S}$ тоже одноэлементен.*

Введем ряд понятий, связанных с продолжением G-отображений в категории $\mathcal{C}$, совпадающей с ISOV или с EQUIV. Пространство $\mathbb{X}$ с действием компактной группы G называется *абсолютным окрестностным $\mathcal{C}$-экстензором* (обозначается $\mathbb{X} \in \mathcal{C}$-ANE), если каждый морфизм $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{X}$ из $\mathcal{C}$, определенный на замкнутом G-подмножестве $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ G-пространства $\mathbb{Z}$ и называемый *частичным $\mathcal{C}$-морфизмом*, может быть продолжен на некоторую G-окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$ до морфизма $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{X} \in \mathcal{C}$. Если всегда возможно сделать $\mathbb{U}$ равным $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ называется *абсолютным $\mathcal{C}$-экстензором*, $\mathbb{X} \in \mathcal{C}$-AE. Если действующая группа G тривиальна (т.е. пространства рассматриваются без действий), то введенное понятие трансформируется в понятие *абсолютных* [*окрестностных*] *экстензоров* для метрических пространств – A[N]E (см. [12]).

Абсолютный [окрестностный] $\mathcal{C}$-экстензор будет называться:

- эквивариантным [окрестностным] экстензором (кратко, Equiv-A[N]E-пространством), если $\mathcal{C} = \text{EQUIV}$;
- изовариантным [окрестностным] экстензором (кратко, Isov-A[N]E-пространством), если $\mathcal{C}$ совпадает с категорией ISOV.

Отметим, что Isov-AE-пространство совпадает с универсальным G-пространством в смысле Пале, а его пространство орбит классифицирует G-пространства. Если

$\mathcal{C}$-гомотопия $H\colon \mathbb{X}\times[0,1]\to\mathbb{Y}$ соединяет морфизмы $f,g\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ категории $\mathcal{C}$, то будем кратко писать:

- $f\simeq_{\mathrm{Equiv}} g$, если $\mathcal{C}=\mathrm{EQUIV}$,
- $f\simeq_{\mathrm{Isov}} g$, если $\mathcal{C}=\mathrm{ISOV}$.

Замкнутая подгруппа $H<G$ компактной группы G называется *экстензорной*, если однородное пространство $G/H\in G$ метризуемо и является G-ANE-пространством. Известно, что если $H<G$ является экстензорной подгруппой, то существует нормальная подгруппа $P\lhd G$ такая, что $P<H$ и G/P есть компактная группа Ли, а также G/H есть топологическое многообразие и G/H конечномерно и локально связно. Каждое из трех приведенных свойств характеризует экстензорные подгруппы [13]. Из существования в любой компактной группе как угодно малых нормальных экстензорных подгрупп следует

Предложение 3. *Для любой окрестности $\mathcal{O}(H)\subset G$ подгруппы H компактной группы G существует такая экстензорная подгруппа $H'<G$, что $H\subset H'\subset\mathcal{O}(H)$.*

Эти и другие свойства экстензорных подгрупп изложены в [14], [5]. Известное понятие *евклидова окрестностного G-ретракта над пространством* [7] может быть обобщено следующим образом.

Опеределение 1. G-Отображение $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ называется *локально эквивариантно мягким*, если для любой допустимой относительно f G-диаграммы[1]

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Y} \\ \uparrow{\scriptstyle\varphi} & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathbb{A} & \hookrightarrow & \mathbb{W} \end{array}$$

существует окрестностное G-продолжение $\widehat{\varphi}\colon\mathcal{U}(\mathbb{A})\to\mathbb{X}$ отображения φ, являющееся поднятием ψ.

Несложно теорему Дика [7; п. 7.6.4.] усилить до следующего утверждения.

Теорема 6. *Пусть $K<H<G$, а $K<G$ есть экстензорная подгруппа. Тогда естественное G-отображение*

$$p\colon G/K\to G/H,\qquad g\cdot K\mapsto g\cdot H,$$

является эквивариантно локально мягким.

Эпиморфизм $\pi\colon G\to H$ компактных групп с ядром P порождает на G-пространстве $\mathbb{X}$ отношение эквивалентности $x\sim x'\Leftrightarrow x'\in P\cdot x$. Ясно, что фактор-пространство $\mathbb{X}/P$ по этому отношению совпадает с $\{P\cdot x\mid x\in\mathbb{X}\}$ и является H-пространством:

$$h\cdot(P\cdot x)=P\cdot(g\cdot x),\qquad \text{где}\quad g\in\pi^{-1}(h).$$

Если $y=P\cdot x$, то стабилизатор H_y совпадает с $\pi(G_x)$.

Назовем фактор-отображение $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{X}/P$ *P-орбитной проекцией.* Если $P=G$, то f совпадает с орбитной проекцией $p\colon\mathbb{X}\to\mathbb{X}/G$. Поскольку композиция P-орбитной проекции f с орбитной проекцией H-пространства $(\mathbb{X}/P)/H$ есть совершенное

[1] То есть G-диаграммы, в которой $\mathbb{A}\subset\mathbb{W}$ есть замкнутое G-подпространство, f, φ и ψ суть G-отображения, а также $f\circ\varphi=\psi\restriction_{\mathbb{A}}$.

отображение, то сама она является тоже совершенной сюръекцией и обладает следующими свойствами:

$$f(gx) = \pi(g) \cdot f(x) \qquad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{X}, \quad g \in G, \tag{1}$$ {eq1}

$$\pi(G_x) = H_{f(x)} \qquad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{X}, \tag{2}$$ {eq2}

$$\text{равенство} f(x) = f(x') \text{ влечет принадлежность } x \text{ и } x' \text{ одной } G\text{-орбите.} \tag{3}$$ {eq3}

Оказывается, эти свойства полностью характеризуют P-орбитную проекцию [5].

Предложение 4. *Совершенная сюръекция $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ из G-пространства $\mathbb{X}$ на H-пространство $\mathbb{Y}$ является P-орбитной проекцией в том и только том случае, когда f обладает свойствами (1)–(3).*

Пусть $K < G$, $L \rightleftharpoons \pi(K) < H$ и $\pi' \rightleftharpoons \pi\colon K \to L$ – эпиморфизм компактных групп с ядром $Q = P \cap K$. Ясно, что

$$\text{отображение } p\colon G/K \to H/L,\ p(g \cdot K) = \pi(g) \cdot L, \text{ является } P\text{-орбитной проекцией.} \tag{4}$$ {eq4}

Пусть также $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ есть P-орбитная проекция, а $\varphi\colon \mathbb{X} \to G/K$ есть отображение среза. Ясно, что $\mathbb{X}' \rightleftharpoons \varphi^{-1}([K])$ является K-пространством, а $\mathbb{Y}' \rightleftharpoons f(\mathbb{X})$ – L-пространством. Из предложения 4 легко следует свойство наследуемости орбитных проекций.

Предложение 5. *Отображение ограничения $f' \rightleftharpoons f\colon \mathbb{X}' \to \mathbb{Y}'$ является Q-орбитной проекцией.*

Пусть $K < G$ и $P \setminus K \neq \varnothing$. Тогда существует такая экстензорная подгруппа $\overline{K} < G$, $K < \overline{K} < G$, что отображение

$$\overline{p}\colon G/\overline{K} \to H/\overline{L}, \quad \overline{p}(g \cdot \overline{K}) = \pi(g) \cdot \overline{L}, \qquad \text{где} \quad \overline{L} \rightleftharpoons \pi(\overline{K}) < H,$$

является нетривиальной P-орбитной проекцией (и в силу теоремы 6 является эквивариантно локально мягким).

Пусть заданы экстензорная подгруппа $K < G$, G-отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ и замкнутое G-подмножество $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X}$, а также коммутативная G-диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X}_0 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & G/K \arrow[d, "p"] \\
\mathbb{Y} \arrow[r, "\psi"] & G/H
\end{tikzcd}$$

Так как в силу теоремы 6 естественное G-отображение $p\colon G/K \to G/H$, $K < H < G$, является эквивариантно локально мягким, а коммутативную G-диаграмму легко трансформировать в допустимую G-диаграмму $G/K \xleftarrow{\varphi} \mathbb{X}_0 \subset \mathbb{X} \xrightarrow{\psi \circ f} G/H$ относительно p, то отсюда легко следует результат, который можно рассматривать как распространение теоремы о продолжении среза G-пространства на случай G-отображений.

Теорема 7. *Существует такое G-продолжение $\widehat{\varphi}\colon \mathcal{O}(\mathbb{X}_0) \to G/K$ отображения φ на G-окрестность $\mathcal{O}(\mathbb{X}_0)$, что $p \circ \varphi = \psi \circ f$.*

Ряд Ли G-пространства. В компактной группе G рассмотрим *ряд Ли* $\{P_\alpha \lhd G\}$ нормальных подгрупп, индексированных ординалами $\alpha < \tau$ (см. [13]). Это означает, что

$$P_1 = G, \qquad P_\beta < P_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha < \beta,$$
$$P_\alpha / P_{\alpha+1} \quad \text{есть компактная группа Ли для всех} \quad \alpha < \tau, \qquad \bigcap \{P_\alpha \mid \alpha < \tau\} = \{e\}. \tag{5}$$

{eq5}

В этом случае G есть предел $\varprojlim \{G/P_\alpha, \varphi_\alpha^\beta\}$ обратной системы фактор-групп $\{G/P_\alpha\}$ и естественных эпиморфизмов $\chi_\alpha^\beta \colon G/P_\beta \to G/P_\alpha$, $\alpha < \beta$. При этом ядро соседних проекций $\chi_\alpha^{\alpha+1}$ совпадает с компактной группой Ли $P_\alpha/P_{\alpha+1}$.

Рассмотрим более общую конструкцию. Пусть $\pi_\alpha^\beta \colon \mathbb{X}_\beta \to \mathbb{X}_\alpha$ есть естественная проекция из $\mathbb{X}_\beta = \mathbb{X}/P_\beta$ в $\mathbb{X}_\alpha = \mathbb{X}/P_\alpha$. Тогда π_α^β является P_α/P_β-орбитной проекцией, а отображение $\pi \colon \mathbb{X} \to \varprojlim \{\mathbb{X}_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$, заданное формулой $\pi(x) = \{P_\alpha \cdot x\}$, является эквиморфизмом. Доказательство этого состоит в непосредственном применении критерия эквиморфности. Заметим, что соседние проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ являются P-орбитными проекциями с компактной группой Ли $P = P_\alpha/P_{\alpha+1}$. Будем говорить, что обратная система $\{\mathbb{X}_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$ есть *ряд Ли G-пространства* $\mathbb{X}$.

Часто возникает обратная ситуация, когда имеется обратная система, но нет самого G-пространства. Известный результат [15; гл. 2, § 6, теорема 11] может быть обобщен следующим образом.

Лемма 2. *Пусть $\{P_\alpha \lhd G\}$ есть ряд Ли, P_α^β, $\alpha < \beta$, есть ядро гомоморфизма φ_α^β, а $g_\alpha^\beta \colon \mathbb{Z}_\beta \to \mathbb{Z}_\alpha$ есть P_α^β-орбитная проекция, причем*

$$g_\alpha^\beta \circ g_\beta^\gamma = g_\alpha^\gamma \qquad \textit{для всех} \quad \alpha < \beta < \gamma.$$

Тогда $\mathbb{Z} = \varprojlim \{\mathbb{Z}_\alpha, g_\alpha^\beta\}$ есть G-пространство, $\mathbb{Z}_\alpha = \mathbb{Z}/P_\alpha$, а обратная система $\{\mathbb{Z}_\alpha, g_\alpha^\beta\}$ есть ряд Ли $\mathbb{Z}$.

Характеризация G-пространств вида $G/H \times [0,1]$, возможно, известна.

Предложение 6. *Если $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(H)}$, а $Z = [0,1]$, то $\mathbb{Z}$ эквиморфно $G/H \times [0,1]$.*

Доказательство. Естественную проекцию $\pi \colon \mathbb{Z}_H \to Z$ можно рассматривать как орбитную по действию нормализатора $N(H)$ на $\mathbb{Z}_H$, $Z = \mathbb{Z}_H/N(H)$. Из предложения 7 следует, что существует сечение $\sigma \colon Z \to \mathbb{Z}_H$ отображения π. Тогда $\varphi \colon G/H \times [0,1] \to \mathbb{Z}$, $\varphi(gH, t) = g \cdot \sigma(t)$, есть корректно определенный эквиморфизм.

Предложение 7. *Пусть компактная группа G действует на пространстве $\mathbb{X}$ одноорбитного типа. Тогда орбитная проекция $p \colon \mathbb{X} \to X$ есть расслоение Гуревича.*

Доказательство. Разложим G-пространство $\mathbb{X}$ в ряд Ли $\{\mathbb{X}_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}$. Поскольку $P = P_\alpha/P_{\alpha+1}$ есть компактные группы Ли, то в силу леммы 3 соседние P-орбитные проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ являются локально тривиальными расслоениями и, следовательно, расслоениями Гуревича.

Лемма 3. *Любая P-орбитная проекция $f \colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ из G-пространства $\mathbb{X}$ одноорбитного типа на H-пространство $\mathbb{Y}$, где ядро P эпиморфизма $\pi \colon G \to H$ есть компактная группа Ли, является локально тривиальным расслоением.*

Доказательство леммы 3 легко следует из теоремы о продолжении среза.

2. Изовариантные экстензоры

Теорема 1, очевидно, вытекает из более точного результата, а именно из следующей теоремы.

Теорема 8. *Пусть для всех $i \geqslant 1$ Equiv-AE-пространство $\mathbb{X}_i$ является Isov-порождающим пространством. Тогда*

$$\begin{aligned}&\text{для любого частичного } G\text{-отображения } \mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X} \rightleftharpoons \prod\{\mathbb{X}_i \mid i \geqslant 1\}\\ &\text{существует такое } G\text{-отображение } \psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}, \text{ являющееся продолжением } \varphi,\\ &\text{что } \psi\restriction_{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{A}} \text{ есть изовариантное отображение.}\end{aligned} \tag{6}$$

{eq6}

Доказательство. Так как $\mathbb{X} \in$ Equiv-AE, то достаточно будет для любого эквивариантного отображения $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ найти такое G-отображение $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, продолжающее $\varphi = \widehat{\varphi}\restriction_{\mathbb{A}}$, что $\psi\restriction_{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{A}}$ есть изовариантное отображение. Поскольку $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ замкнуто, то возможно выбрать последовательность окрестностей $\mathbb{Z} = \mathbb{U}_0 \Supset \mathbb{U}_1 \Supset \cdots$ и G-функций $\chi_i\colon \mathbb{Z} \to [0,1]$, $i \geqslant 1$, таких, что

$$\bigcap \mathbb{U}_i = \mathbb{A}, \qquad \chi_i^{-1}(0) \supset \mathbb{Z}\setminus\mathbb{U}_i, \quad \chi_i^{-1}(1) \supset \mathbb{U}_{i+1}\,^2.$$

Представим отображение $\widehat{\varphi}$ в виде $\prod \widehat{\varphi}_i$, где $\widehat{\varphi}_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}_i$ есть эквивариантное отображение. Зафиксируем изовариантное отображение $e_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}_i$ (существующее, так как $\mathbb{X}_i$ является Isov-порождающим), и пусть $H_i\colon \mathbb{Z}\times I \to \mathbb{X}_i$ есть Equiv-гомотопия, соединяющая e_i с $\widehat{\varphi}_i$ (существующая, так как $\mathbb{X}_i \in$ Equiv-AE). Тогда искомое отображение ψ задается формулой

$$\psi\restriction_{\mathbb{A}} = \widehat{\varphi}\restriction_{\mathbb{A}} = \varphi,$$
$$(\psi\restriction_{\mathbb{U}_i\setminus\mathbb{U}_{i+1}})(z) = \widehat{\varphi}_1 \times \cdots \times \widehat{\varphi}_{i-1} \times H_i(z,\chi_i(z)) \times e_{i+1} \times \cdots \qquad \text{при} \quad i \geqslant 0.$$

Зафиксируем замкнутое топологическое вложение $j\colon X \hookrightarrow L$ пространства орбит произвольного G-пространства $\mathbb{X}$ в некоторое линейное нормированное пространство L [16]. Поскольку счетная степень $\mathbb{J}$ метрического конуса $\operatorname{Con}\mathbb{T}$ над $\mathbb{T} = \bigsqcup\{G/H \mid G/H \in G\text{-ANE}\}$ является Isov-порождающим [5], то существует изовариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{J}$. Очевидно, что произведение $(j\circ p)\times f$ есть замкнутое топологическое G-вложение $\mathbb{X}$ в G-пространство $\mathbb{Y} \rightleftharpoons L\times\mathbb{J}$, которое, как легко видеть, есть Isov-AE. Таким образом, нами доказан следующий результат.

Теорема 9. *Любое G-пространство допускает замкнутое G-вложение в* Isov-AE-*пространство $L\times\mathbb{J}$.*

Из теорем 9 и 8 легко вывести важное соотношение между инъективными объектами изовариантной и эквивариантной категорий.

Теорема 10. *Для любого* Isov-A[N]E-*пространства $\mathbb{X}$ справедливо свойство* (6), *и следовательно, любое* Isov-A[N]E-*пространство является* Equiv-A[N]E-*пространством.*

Без доказательства отметим, что эквивариантный гильбертов куб $\mathbb{Q}$ (для компактной метрической группы G) есть Isov-AE. С другой стороны, если $\mathbb{X}$ есть

[2] Будем говорить, что вложение $A \subset B$ *строгое*, и писать $A \Subset B$, если $\operatorname{Cl} A \subset \operatorname{Int} B$.

компактное Isov-AE-пространство, то произведение $\mathbb{X}$ и гильбертова куба Q эквиморфно $\mathbb{Q}$. Другими примерами Isov-AE-пространств могут служить: эквивариантное пространство $\mathbb{L}_2$; пространство $\mathrm{C}(G, L)$ (с метрикой равномерной сходимости) всех непрерывных отображений $f\colon G \to L$ в гильбертово пространство L веса $w(G)$, наделенное непрерывным действием группы G по формуле $(g \cdot f)(h) = f(g^{-1} \cdot h)$, где $f \in \mathrm{C}(G, L)$, а $g, h \in G$. Эти и другие результаты теории изовариантных экстензоров будут изложены в последующих публикациях автора.

Легко привести пример Equiv-AE-пространства $\mathbb{Z} \notin$ Isov-ANE. Приведем несколько результатов, позволяющих судить о степени расхождения этих двух классов: $\mathbb{X} \in$ Equiv-ANE влечет свойство равностепенной локальной стягиваемости (equi-LC) для семейства $\{\mathbb{X}^H \mid H < G\}$, а $\mathbb{X} \in$ Isov-ANE влечет $\{\mathbb{X}_H \mid H < G\} \in$ equi-LC; $\operatorname{Con} \mathbb{X} \in$ Isov-AE и $\mathbb{X}^G \in$ AE влечет $\mathbb{X} \in$ Isov-AE.

По-видимому, следующие вопросы представляют определенный интерес в связи с гипотезой Гильберта–Смита [17]: если действующая группа G нетривиальна, а $\mathbb{X} \in$ Isov-ANE, то $\dim \mathbb{X} = \infty$? $\dim X = \infty$?

3. Соединение расщеплений

Ограничением слабо подходящей диаграммы $\mathcal{D}$ на инвариантное подмножество $\mathbb{U} \subset \mathbb{T}$ называется диаграмма $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}$,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{U}_{\mathbb{S}} \times [0,1] \cup \mathbb{U} \times \{0\} \arrow[r, hook, "\varphi_{\mathbb{U}}"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & \mathbb{X}_{\mathbb{U}} \rightleftharpoons f^{-1}(\mathbb{Y}_{\mathbb{U}}) \arrow[d, "f"] \\
\mathbb{U} \times [0,1] \arrow[r, "\psi_{\mathbb{U}}"] & \mathbb{Y}_{\mathbb{U}} \rightleftharpoons \psi(\mathbb{U} \times [0,1])
\end{tikzcd}$$

в которой $\varphi_{\mathbb{U}}$ есть ограничение φ на $\mathbb{U}_{\mathbb{S}} \times I \cup \mathbb{U} \times \{0\}$, $\psi_{\mathbb{U}} \rightleftharpoons \psi\restriction_{\mathbb{U}\times I}$ и $\mathbb{U}_{\mathbb{S}} \rightleftharpoons \mathbb{U} \cap \mathbb{S}$. Ясно, что $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}$ является слабо подходящей диаграммой; если диаграмма $\mathcal{D}$ расщепляется, то и $\mathcal{D}_{\mathbb{U}}$ тоже.

Следующее утверждение о соединении расщеплений является модификацией рассуждений, использованных Пале в [1], в более общую ситуацию.

Предложение 8. *Пусть $\{\mathbb{T}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ есть открытое локально-конечное G-покрытие $\mathbb{T}$. Если ограничение $\mathcal{D}_\lambda$ слабо подходящей диаграммы $\mathcal{D}$ на $\mathbb{T}_\lambda$ расщепляемо для любого $\lambda \in \Lambda$, то диаграмма $\mathcal{D}$ тоже расщепляема.*

Сначала рассмотрим случай двухэлементого индексного множества Λ.

Лемма 4 (о соединении двух расщеплений). *Пусть $\{\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2\}$ есть открытое G-покрытие $\mathbb{T}$, $\mathcal{D}_i$ есть ограничение слабо подходящей диаграммы $\mathcal{D}$ на $\mathbb{T}_i$. Если G-гомеоморфизмы $g_i\colon \mathbb{T}_i \times [0,1] \to \mathbb{X}_{\mathbb{T}_i}$, $i \leqslant 2$, расщепляют диаграммы $(\mathcal{D})_i$ соответственно, то существует G-гомеоморфизм $g\colon \mathbb{T} \times [0,1] \to \mathbb{X}$, расщепляющий диаграмму $\mathcal{D}$. При этом*

$$g = g_i \quad \text{на} \quad \mathbb{T}_i \setminus \mathbb{T}_0, \qquad \text{где} \quad \mathbb{T}_0 \rightleftharpoons \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2. \tag{7}$$

{eq7}

Доказательство леммы 4 будет основываться на эффекте расщепления гомотопии.

Лемма 5 (о расщепляющей гомотопии). *Пусть G-гомеоморфизмы $\widehat{\varphi}_i\colon \mathbb{T}\times[0,1]\to \mathbb{X}$, $i=1,2$, расщепляют подходящую диаграмму $\mathcal{D}$. Тогда существует изовариантная G-гомотопия $H_s\colon \mathbb{T}\times[0,1]\to\mathbb{X}$, $0\leqslant s\leqslant 1$, соединяющая $\widehat{\varphi}_1$ и $\widehat{\varphi}_2$, такая, что H_s расщепляет диаграмму $\mathcal{D}$*[3] *для всех $0\leqslant s\leqslant 1$.*

(Доказательство леммы 5 приведено ниже – после завершения доказательства предложения 8.)

В силу леммы 5 о расщепляющей гомотопии существует

$$\begin{aligned}&\text{изовариантная } G\text{-гомотопия } H_s\colon \mathbb{T}_0\times[0,1]\to\mathbb{X}_{\mathbb{T}_0},\ 0\leqslant s\leqslant 1,\\ &\text{соединяющая } g_1\restriction_{\mathbb{T}_0} \text{ и } g_2\restriction_{\mathbb{T}_0}, \text{ такая, что } G\text{-гомеоморфизм } H_s\\ &\text{расщепляет диаграмму } \mathcal{D}_{\mathbb{T}_0} \text{ для всех } 0\leqslant s\leqslant 1.\end{aligned}\tag{8}$$

{eq8}

Так как $\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}_2$ и $\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}_1$ являются дизъюнктными замкнутыми подмножествами нормального пространства $\mathbb{T}$, то существует такая инвариантная функция $\xi\colon\mathbb{T}\to[1,2]$, что

$$\begin{aligned}&\xi\equiv 0 \qquad \text{в некоторой окрестности} \quad \mathbb{T}\setminus\mathbb{T}_2,\\ &\xi\equiv 1 \qquad \text{в некоторой окрестности} \quad \mathbb{T}\setminus\mathbb{T}_1.\end{aligned}\tag{9}$$

{eq9}

Наконец, полагаем

$$g(u,t)=\begin{cases} g_1(u,t), & \text{если } (u,t)\in(T\setminus T_2)\times I,\\ H_{\xi(u)}(u,t), & \text{если } (u,t)\in T_0\times I,\\ g_2(u,t), & \text{если } (u,t)\in(T\setminus T_1)\times I.\end{cases}$$

Непрерывность получающегося отображения $g\colon\mathbb{T}\times I\to\mathbb{Z}$ проверяется непосредственно с помощью (9). То, что g расщепляет диаграмму $\mathcal{D}$ следует из (8). Лемма 4 доказана.

Дальнейшее доказательство предложения 8 о соединении расщеплений осуществляется стандартной трансфинитной индукцией по вполне упорядоченному индексному множеству Λ с помощью леммы 4 о соединении двух расщеплений. Стабилизация строящегося отображения g, расщепляющего диаграмму $\mathcal{D}$, и его непрерывность следуют из локальной конечности покрытия $\{\mathbb{T}_\lambda\}$ и свойства (7). Все детали остаются на рассмотрение читателю.

Доказательство леммы 5. Из условия легко следует, что $h\rightleftharpoons(\widehat{\varphi}_1)^{-1}\circ\widehat{\varphi}_2$ есть G-автогомеоморфизм $\mathbb{T}\times[0,1]$, тождественный на $\mathbb{S}\times[0,1]\cup\mathbb{T}\times\{0\}$. Так как

$$\psi=p\circ\widehat{\varphi}_2=(\psi\circ\widehat{\varphi}_1^{-1})\circ\widehat{\varphi}_2=\psi\circ h,\tag{10}$$

{eq10

то отсюда следует, что h имеет вид $h(z,t)=(\varphi_t(z),t)$, где $\varphi_t\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ есть непрерывное (по $t\in T$) семейство G-гомеоморфизмов. Ясно, что $\varphi_0=\mathrm{Id}$ и $\varphi_t\restriction_{\mathbb{S}}=\mathrm{Id}$ для всех $t\in I$.

Поскольку в силу (10) имеем $\psi(w)=\psi(P\cdot w)=\psi(h(P\cdot w))$ для всех $w=(z,t)\in\mathbb{T}\times I$, то $(\psi/P)(P\cdot z,t)=(\psi/P)(P\cdot\varphi_t(z),t)$. Принимая во внимание, что ψ/P есть H-гомеоморфизм, получаем

$$P\cdot z=P\cdot\varphi_t(z) \qquad \text{для всех} \quad t\in I.\tag{11}$$

{eq11

[3] И, стало быть, H_s является G-гомеоморфизмом.

После этого полагаем

$$h_s(u,t) = (\varphi_{s\cdot t}(u), t)\colon \mathbb{T}\times I \to \mathbb{T}\times I, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Непосредственно проверяется, что h_s есть непрерывное семейство G-гомеоморфизмов, а также:

$$h_1 = h, \qquad h_0 = \mathrm{Id}, \qquad h_s = h \quad \text{на} \quad \mathbb{S}\times[0,1]\cup\mathbb{T}\times\{0\}. \tag{12}$$ {eq12

С помощью (11) легко вывести, что

$$\psi = \psi\circ h_s \qquad \text{для всех} \quad s\in I. \tag{13}$$ {eq13

Наконец, искомая изовариантная гомотопия определяется формулой

$$H_s \rightleftharpoons \widehat{\varphi}_1 \circ h_s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Все необходимые свойства H_s следуют из (12) и (13).

4. Доказательство теоремы 3

В теореме 3 достаточно доказывать, что P-орбитная проекция $f\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}=\mathbb{X}/P$ является Isov-расслоением Гуревича. В самом деле, если подходящая диаграмма $\mathcal{D}$ для P-орбитной проекции f из теоремы 3, то перейдем от $\mathbb{Y}$ к $\mathbb{Y}'\subset(T\times I)\times\mathbb{Y}$ – образу $\mathbb{T}\times I$ при G-отображении $q\times\psi\colon \mathbb{T}\times I\to(T\times I)\times\mathbb{Y}$, от $\mathbb{X}$ перейдем к $\mathbb{X}'\subset(T\times I)\times\mathbb{X}$ – прообразу $\mathbb{Y}'$ при P-орбитной проекции

$$f' = \mathrm{Id}\times f\colon (T\times I)\times\mathbb{X}\to(T\times I)\times\mathbb{Y}$$

(здесь $q\colon \mathbb{T}\times I\to T\times I$ есть орбитная проекция). Через φ' и ψ' обозначим отображения

$$q\times\varphi\colon \mathbb{S}\times[0,1]\cup\mathbb{T}\times\{0\}\to\mathbb{X}', \qquad q\times\psi\colon \mathbb{T}\times[0,1]\to\mathbb{Y}'$$

соответственно. Ясно, что P-орбитная проекция $f'\colon \mathbb{X}'\to\mathbb{Y}'$ естественным образом вовлечена в подходящую диаграмму $\mathcal{D}'$, которая в силу того, что ψ' индуцирует гомеоморфизм пространств орбит, является слабо подходящей. В силу теоремы 3 существует изовариантное G-отображение $\widehat{\varphi}'\colon \mathbb{T}\times[0,1]\to\mathbb{X}'$, расщепляющее $\mathcal{D}'$. Искомым изовариантным G-отображением $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{T}\times[0,1]\to\mathbb{X}$, расщепляющим $\mathcal{D}$, является композиция $\widehat{\varphi}'$ с проекцией $(T\times I)\times\mathbb{X}$ на сомножитель $\mathbb{X}$.

Поскольку в любой вполне подходящей диаграмме $\mathcal{D}$ изовариантное отображение $\varphi\colon \mathbb{S}\times[0,1]\cup\mathbb{T}\times\{0\}\to\mathbb{X}$ является замкнутым G-вложением, то при доказательстве теоремы 3, не теряя общности, можно считать, что

1) $\mathbb{S}\times[0,1]\cup\mathbb{T}\times\{0\}$ лежит в $\mathbb{X}$ как замкнутое подмножество, а φ есть тождественное вложение;
2) $\mathbb{Y}=(\mathbb{T}/P)\times I$ и $\psi/P\colon (\mathbb{T}/P)\times I\to\mathbb{Y}$ является тождественным отображением.

Далее доказательство теоремы 3 о расщепляемости слабо подходящей G-диаграммы будет вестись индукцией по компактной группе Ли P с использованием метатеоремы Пале [1], доказательство которой основано на стабилизации убывающей по вложению последовательности компактных групп Ли.

Предложение 9. *Пусть $\mathcal{P}(H)$ есть свойство, которое зависит от компактной группы Ли H. Предположим, что $\mathcal{P}(H)$ верно для тривиальной группы $H = \{e\}$ и $\mathcal{P}(H)$ верно, если $\mathcal{P}(K)$ верно для любой собственной подгруппы $K < H$. Тогда $\mathcal{P}(H)$ верно для всех компактных групп Ли H.*

Если $|P| = 1$, то эпиморфизм $\pi\colon G \to H$ есть изоморфизм, что тривиализует изучаемую ситуацию. Предположим теперь, что для любой собственной подгруппы $Q < P$ теорема 3 доказана, и покажем, что она справедлива для любой P-орбитной проекции $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$.

Следующее утверждение сводит установление расщепляемости слабо подходящей диаграммы $\mathcal{D}$ к случаю, когда отсутствуют P-неподвижные точки в $\mathbb{X}$.

Лемма 6. *Если любая слабо подходящая диаграмма $\mathcal{D}$ с пустым множеством $\mathbb{X}^P$ расщепляема, то расщепляема любая слабо подходящая диаграмма.*

Доказательство. По предположению существует изовариантное отображение $\varphi'\colon (\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^P) \times I \to \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}^P$, расщепляющее слабо подходящую диаграмму $\mathcal{D}_{\mathbb{T}\setminus\mathbb{T}^P}$. Доопределим отображение φ', потребовав, чтобы на $\mathbb{T}^P$ оно совпадало с ψ. Легко проверяется корректность определения и непрерывность φ'.

Пусть $\mathcal{D}$ есть слабо подходящая диаграмма. В силу леммы 6 достаточно далее рассматривать G-пространство $\mathbb{X}$ с $\mathbb{X}^P = \varnothing$ (что эквивалентно $P \setminus G_x \neq \varnothing$ для всех $x \in \mathbb{X}$). Так как $\mathbb{S} \times [0,1] \cup \mathbb{T} \times \{0\}$ естественно содержится в $\mathbb{X}$, то $\mathbb{T}^P = \varnothing$.

Разберем сначала случай, когда $\mathbb{T}$ допускает нетривиальное отображение среза $\alpha\colon \mathbb{T} \to G/K$, где $K < G$ есть экстензорная подгруппа с $P \setminus K \neq \varnothing$. В этом случае G-отображение $\beta \rightleftharpoons \alpha \circ \mathrm{pr}_1\colon \mathbb{T} \times [0,1] \to G/K$, где $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{T} \times I \to \mathbb{T}$ есть проекция на первый сомножитель, при переходе к P-орбитной проекции порождает отображение среза

$$\beta_P\colon \mathbb{Y} = (\mathbb{T}/P) \times [0,1] \to G/(P \cdot K) = H/L, \qquad \text{где} \quad L \rightleftharpoons \pi(K) < H.$$

Через

$$p\colon G/K \to G/\pi^{-1}(\pi(K)) \cong H/L$$

обозначим естественное G-отображение, являющееся P-орбитной проекцией.

Лемма 7. *Если частичное G-отображение*

$$\mathbb{X} \hookleftarrow \mathbb{S} \times [0,1] \cup \mathbb{T} \times \{0\} \xrightarrow{\beta\restriction} G/K,$$

имеет такое G-продолжение $\widehat{\beta}\colon \mathbb{X} \to G/K$, что $\beta_P \circ f = p \circ \widehat{\beta}$, то диаграмма $\mathcal{D}$ расщепляема.

Доказательство. Пусть $\pi' \rightleftharpoons \pi\restriction\colon K \to L$ – эпиморфизм компактных групп с ядром $Q = P \cap K$. Так как $P \setminus K \neq \varnothing$, то Q есть собственная подгруппа группы Ли P.

Введем в рассмотрение следующие объекты: K-пространство $\mathbb{T}' \rightleftharpoons \alpha^{-1}([K])$ и его замкнутое подпространство $\mathbb{S}' \rightleftharpoons \mathbb{T}' \cap \mathbb{S}$, а также K-пространства $\mathbb{X}' \rightleftharpoons \widehat{\beta}^{-1}([K])$. Ясно, что L-пространство $\mathbb{Y}' \rightleftharpoons \beta_P^{-1}([L])$ совпадает с $f(\mathbb{X}')$. Предложение 5 о наследуемости орбитных проекций влечет, что отображение ограничения $f' = f\restriction\colon \mathbb{X}' \to \mathbb{Y}'$ является Q-орбитной проекцией.

Так как $\widehat{\beta} = \operatorname{ext}(\beta\restriction_{\mathbb{S}\times[0,1]\cup\mathbb{T}\times\{0\}})$, то

$$\varphi(\mathbb{S}' \times I \cup \mathbb{T}' \times \{0\}) \subset \mathbb{X}', \qquad \psi(\mathbb{T}' \times I) = \mathbb{Y}'.$$

Обозначим через

$$\varphi' \colon \mathbb{S}' \times I \cup \mathbb{T}' \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{X}' \qquad \psi' \colon \mathbb{T}' \times I \to \mathbb{Y}'$$

ограничения φ и ψ на соответствующие подмножества. Рассмотрим естественным образом возникающую коммутативную K-диаграмму $\mathcal{D}'$,

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}' \times I \cup \mathbb{T}' \times \{0\} \arrow[r, hook, "\varphi'"] \arrow[d, hook] & \mathbb{X}' \arrow[d, "f'"] \\
\mathbb{T}' \times I \arrow[r, "\psi'"] & \mathbb{Y}'
\end{tikzcd}$$

в которой ψ' индуцирует гомеоморфизм пространств орбит, а φ' есть K-вложение. Из леммы 1 легко следует, что G-пространство $\mathbb{Z} \rightleftharpoons (f')^{-1}(\psi'(t' \times I))$ имеет одноорбитный тип, и следовательно, коммутативная K-диаграмма $\mathcal{D}'$ является слабо подходящей.

Так как $Q < P$ является собственной подгруппой, то по индуктивному предположению существует K-отображение $\widehat{\varphi}' \colon \mathbb{T}' \times I \to \mathbb{X}'$, расщепляющее $\mathcal{D}'$. Непосредственно проверяется, что формулой

$$\widehat{\varphi}([g, s]_K) = [g, \widehat{\varphi}'(s)]_K, \qquad s \in \mathbb{T}' \times I,$$

корректно определено G-отображение

$$\widehat{\varphi} \colon G \times_K (\mathbb{T}' \times I) \equiv \mathbb{T} \times I \to G \times_K \mathbb{X}' \equiv \mathbb{X},$$

которое и расщепляет диаграмму $\mathcal{D}$.

Покажем, что условие леммы 7 (а, следовательно, и ее заключение) выполнены для элементов некоторого инвариантного покрытия $\mathbb{T}$. Тогда в силу теоремы о соединении расщеплений и индуктивного предположения будет следовать теорема 3.

Для этого рассмотрим произвольную точку $t \in \mathbb{T}$. Так как $P \setminus G_t \neq \varnothing$, то в силу предложения 3 существует такая экстензорная подгруппа $K < G$, что $G_t < K$ и $P \setminus K \neq \varnothing$. Так как $G/K \in G$-ANE, то существует отображение среза $\alpha \colon \mathbb{U} \to G/K$, где $\mathbb{U} = \mathbb{U}(t) \subset \mathbb{T}$ есть G-окрестность t.

Пусть $L \rightleftharpoons \pi(K) < H$, а $p \colon G/K \to G/\pi^{-1}(\pi(K)) \cong H/L$ – естественное G-отображение, порожденное вложением групп $K < \pi^{-1}(\pi(K))$. Через

$$\beta_P \colon \psi(\mathbb{U}) \times [0,1]) = (\mathbb{U}/P) \times [0,1] \to G/(P \cdot K) = H/L$$

обозначим отображение среза, получающееся из G-отображения $\beta \rightleftharpoons \alpha \circ \mathrm{pr}_1 \colon \mathbb{U} \times [0,1] \to G/K$ при переходе к P-орбитной проекции.

Предложение 10. *Существует такая G-окрестность $\mathbb{V} \subset \mathbb{U}$ точки t, что частичное G-отображение*

$$(f^{-1} \circ \psi)(\mathbb{V} \times I) \hookleftarrow (\mathbb{S} \cap \mathbb{V}) \times I \cup \mathbb{V} \times \{0\} \xrightarrow{\beta} G/K,$$

допускает G-продолжение

$$\widehat{\beta}\colon (f^{-1}\circ\psi)(\mathbb{V}\times I)\to G/K, \qquad \text{для которого} \quad \beta_P\circ f = p\circ\widehat{\beta}.$$

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $\mathbb{U}$ совпадает с $\mathbb{T}$, т.е. существует отображение среза $\alpha\colon \mathbb{T}\to G/K$.

Рассмотрим G-пространство $\mathbb{A}\rightleftharpoons f^{-1}(\psi(\{t\}\times I))\subset\mathbb{X}$. Ясно, что $\mathbb{A}\subset\mathbb{S}\times I$ для $t\in\mathbb{S}$ и $\mathbb{A}\cap(\mathbb{S}\times I\cup\mathbb{T}\times\{0\})=G(t)\times\{0\}$ для $t\notin\mathbb{S}$. Так как $\mathbb{A}$ имеет одноорбитный тип (G_t), а его пространство орбит гомеоморфно I, то в силу предложения 6 $\mathbb{A}$ эквиморфно $G(t)\times I$. Поэтому на $\mathbb{S}\times I\cup\mathbb{T}\times\{0\}\cup\mathbb{A}$ существует такое отображение среза $\gamma\colon \mathbb{S}\times I\cup\mathbb{T}\times\{0\}\cup\mathbb{A}\to G/K$, что γ совпадает с β на $\mathbb{S}\times I\cup\mathbb{T}\times\{0\}$, а также $\beta_P\circ f=p\circ\gamma$.

В силу теоремы 6 естественное G-отображение $p\colon G/K\to G/\pi^{-1}(\pi(K))$ является эквивариантно локально мягким. В силу теоремы 7 существует такое G-продолжение $\widehat{\beta}\colon \mathbb{W}\to G/K$ отображения γ на G-окрестность $\mathbb{W}\supset\mathbb{S}\times I\cup\mathbb{T}\times\{0\}\cup\mathbb{A}$, что $\beta_P\circ f=p\circ\widehat{\beta}$. Уменьшая, если надо, окрестность $\mathbb{W}$ до окрестности вида $(f^{-1}\circ\psi)(\mathbb{V}\times I)$, получаем требуемое отображение среза $\widehat{\beta}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. S. Palais, *The Classification of G-Spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.

[2] С. М. Агеев, “Классификация G-пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1345–1357.

[3] С. М. Агеев, “Изовариантные экстензоры”, *Сиб. матем. журн.* (в печати).

[4] С. М. Агеев, “Экстензорные свойства пространств орбит и задача продолжения действия”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1994, № 1, 11–16.

[5] С. М. Агеев, Д. Реповш, “О продолжении действий групп”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 3–28.

[6] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, de Gruyter Stud. Math., **8**, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

[7] Т. том Дик, *Преобразования групп и теория представлений*, Мир, М., 1982.

[8] S. Waner, “A generalization of the cohomology of groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **85**:3 (1982), 469–474.

[9] S. Waner, “Mackey functors and G-cohomology”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **90**:4, 641–648.

[10] J. P. May, *Equivariant Homotopy and Cohomology Theory*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **91**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[11] Г. Е. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980.

[12] К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971.

[13] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, М., 1984.

[14] С. М. Агеев, “Эквивариантная теорема Дугунджи”, *УМН*, **45**:5 (1990), 179–180.

[15] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, М., 1971.

[16] S.-t. Hu, *Theory of Retracts*, Wayne State University Press, Detroit, 1965.

[17] С. М. Агеев, “Классифицирующие пространства для свободных действий и гипотеза Гильберта–Смита”, *Матем. сб.*, **183**:1 (1992), 143–151.

С. М. Агеев
Беларусский государственный университет
E-mail: ageev_sergei@yahoo.com

Поступило
15.11.2010
Исправленный вариант
09.10.2011

Д. Реповш
University of Ljubljana, Словения
E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si