УДК 515.124.62+515.122.4

С. М. Агеев

Изовариантные экстензоры и характеризация эквивариантных гомотопических эквивалентностей

Известная теорема Джеймса–Сегала распространяется на случай произвольного семейства $\mathcal{F}$ сопряженных классов замкнутых подгрупп компактной группы Ли G: G-отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ между метрическими $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространствами является G-гомотопической эквивалентностью в том и только в том случае, когда оно является слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью. Доказательство основывается на развиваемой в работе теории изовариантных экстензоров, позволяющей наделить $\mathcal{F}$-классифицирующие G-пространства дополнительной структурой.

Библиография: 24 наименования.

Ключевые слова: классифицирующие G-пространства, изовариантный абсолютный экстензор, слабая эквивариантная гомотопическая эквивалентность.

§ 1. Введение

Пусть G – компактная группа Ли. Зафиксируем некоторое семейство $\mathcal{F}$ орбитных типов (которое можно понимать как подмножество множества Conj_G сопряженных классов замкнутых подгрупп G) и рассмотрим категорию $\mathrm{EQUIV}_{\mathcal{F}}$-TOP G-$\mathcal{F}$-пространств (т. е. G-пространств, имеющих орбитный тип $\mathcal{F}$). В настоящей работе исследуется проблема тождественности в этой категории классов G-гомотопических и слабых G-$\mathcal{F}$-гомотопических эквивалентностей в $\mathrm{EQUIV}_{\mathcal{F}}$-TOP между метрическими G-ANE-пространствами. Известная теорема Джеймса–Сегала [1], [2], решающая эту проблему для максимального семейства $\mathcal{F} = \mathrm{Conj}_G$, может быть использована в случае семейства $\mathcal{F}$, замкнутого относительно пересечения его элементов. Однако метод Джеймса–Сегала, как и другие известные методы, более ничего дать не может, поскольку все применяемые при его доказательстве конструкции плохо сопрягаются с орбитными типами.

Отметим, что интерес к данному кругу вопросов в первую очередь мотивируется возможностью функториально сопоставлять с каждым G-пространством $\mathbb{X}$ G-CW-комплекс $S(\mathbb{X}) = S_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$ орбитного типа $\mathcal{F}$ (кратко $S(\mathbb{X}) \in G_{\mathcal{F}}$-CW), который слабо G-$\mathcal{F}$-гомотопически эквивалентен $\mathbb{X}$. Более точно, существуют функтор $S_{\mathcal{F}}$ из категории EQUIV-TOP в $G_{\mathcal{F}}$-CW и такое естественное преобразование $\mathcal{P}\colon S_{\mathcal{F}} \to \mathrm{Id}$, что $\mathcal{P}_{\mathbb{X}}\colon S_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ является слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью для любого $\mathbb{X}$ [3], [4] (следует все же отметить, что работа [3] содержит указание на ошибку в статье [4] и довольно общие указания, как ее исправить). Пространство орбит $S_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})/G$, являющееся CW-комплексом, можно

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Министерства образования Республики Беларусь.

рассматривать как *теоретико-гомотопическое пространство орбит* исходного пространства $\mathbb{X}$, *порождаемое семейством* $\mathcal{F}$. Переход к его когомологиям доставляет важный эквивариантный гомотопический инвариант $\mathbb{X}$ и представляет собой обобщение известной конструкции Бореля, соответствующей одноэлементному семейству $\mathcal{F}$ (см. [5], [6]).

Значение этой конструкции усиливается тем, что G-пространство $S_{\mathcal{F}}(*)$, где через $*$ обозначено одноточечное пространство, является $\mathcal{F}$-классифицирующим в смысле [7], [8] (т. е. для любого G-пространства $\mathbb{Z}$, имеющего орбитный тип $\mathcal{F}$, существует G-отображение $f\colon \mathbb{Z} \to S_{\mathcal{F}}(*)$, единственное с точностью до G-гомотопии). Эквивариантные когомологии Бредона $S_{\mathcal{F}}(*)$ естественно рассматривать как обобщенные когомологии исходной группы G (см. [9]–[11]).

Однако приведенная конструкция, несмотря на ее значимость, не приводит к эффективным вычислениям для нетривиального семейства $\mathcal{F}$. Развиваемый в серии работ новый подход, основанный на теории изовариантных экстензоров, исправляет этот недостаток. Оказывается, в $\mathcal{F}$-классифицирующих G-пространствах может быть введена дополнительная структура *изовариантных абсолютных экстензоров*. В свою очередь, это приводит к эффекту *концентрации $\mathcal{F}$-классифицирующих G-пространств*, состоящему в реализации всех таких пространств в виде пучков $\mathcal{F}$-орбит единого изовариантного абсолютного экстензора. Это наблюдение дает новые вычислительные возможности для нахождения гомотопических инвариантов пространств орбит $\mathcal{F}$-классифицирующих G-пространств. В свою очередь, это дает важную информацию об обобщенных когомологиях компактных групп, а в ряде случаев удается найти их в явном виде. Здесь же мы развиваем необходимый для этого аппарат, который привлекаем затем для установления аналога теоремы Джеймса–Сегала в максимальной общности.

Всюду далее будем рассматривать часть категории $\mathrm{EQUIV}_{\mathcal{F}}$-TOP, состоящую из метрических G-$\mathcal{F}$-пространств, но использовать прежнее обозначение. Инъективные объекты категории $\mathrm{EQUIV}_{\mathcal{F}}$-TOP обозначим через $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-A[N]E. Из теорем 3.1, 3.3 следует, что класс $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-AE всегда непуст, а в [12] установлено, что класс Equiv-ANE-пространств, имеющих орбитный тип $\mathcal{F}$, совпадает с $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространствами (впрочем, мы этим фактом пользоваться не будем). Обобщение теоремы Джеймса–Сегала состоит в следующей характеризации слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентности $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространств.

Теорема 1.1. *Пусть $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ – $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространства, лежащие в категории $\mathrm{EQUIV}_{\mathcal{F}}$-TOP. Тогда G-отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью*[1]*, если и только если f является G-гомотопической эквивалентностью.*

Замечание 1.2. Поскольку любая G-гомотопическая эквивалентность, как легко видеть, является слабой G-гомотопической эквивалентностью, то лишь необходимая часть теоремы 1.1 нуждается в доказательстве.

[1]То есть отображение $f^H\colon \mathbb{X}^H \to \mathbb{Y}^H$ множеств H-неподвижных точек является гомотопической эквивалентностью для любого $(H) \in \mathcal{F}$ и, кроме того, $\mathbb{X}^H \neq \varnothing$ в том и только в том случае, когда $\mathbb{Y}^H \neq \varnothing$.

Приведем некоторые следствия из теоремы 1.1. Сначала охарактеризуем слабую G-$\mathcal{F}$-гомотопическую эквивалентность в случае, когда орбитные типы $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ произвольны.

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ – Equiv-ANE-*пространства. Тогда G-отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью, если и только если f является G-$\mathcal{F}$-гомотопически мягким отображением.*

В свою очередь, теорема 1.3 имеет ряд следствий. Назовем *$\mathcal{F}$-гомотопической оболочкой* Equiv-ANE-пространства $\mathbb{Z}$ совокупность всех G-пространств $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE, допускающих слабую G-$\mathcal{F}$-гомотопическую эквивалентность $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$. Оказывается, что $\mathcal{F}$-гомотопическая оболочка $\mathbb{Z}$ непуста (см. теоремы 6.3, 6.5) и в силу следующего факта ее эквивариантный гомотопический тип определен однозначно.

Теорема 1.4. *Пусть* $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE, $\mathbb{Z} \in$ Equiv-ANE, *а $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Z}$ и $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{Z}$ – две слабые G-$\mathcal{F}$-гомотопические эквивалентности. Тогда существует такая G-гомотопическая эквивалентность $h\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, что $g \circ h \simeq_G f$.*

В настоящей работе этот результат выводится из теоремы 1.3, однако возможно его доказательство с помощью следующего утверждения, которое будет доказано в одной из работ автора.

Теорема 1.5. *Любое* $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE-*пространство имеет G-гомотопический тип G-*CW*-комплекса, имеющего орбитный тип $\mathcal{F}$.*

Несложно увидеть, что три класса G-пространств: класс $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-AE-пространств, класс $\mathcal{F}$-классифицирующих G-пространств и класс G-$\mathcal{F}$-пространств со стягиваемыми множествами H-неподвижных точек для всех $(H) \in \mathcal{F}$ – образуют строго растущую (по включению) последовательность. Однако пересечения каждого из этих классов с классом Equiv-ANE-пространств образуют тождественную последовательность.

Теорема 1.6. *Пусть G-$\mathcal{F}$-пространство $\mathbb{X}$ является* Equiv-ANE-*пространством, а $\mathbb{X}^H$ стягиваемо для любой $(H) \in \mathcal{F}$. Тогда* $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-AE.

В качестве следствия отсюда получаем утверждение, касающееся произвольного G-пространства $\mathbb{X}$. Через $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}$ обозначим семейство $\{(H) \mid \mathbb{X}^H \text{ стягиваемо}\} \subset \mathrm{Orb}(\mathbb{X})$.

Теорема 1.7. *Если $\mathbb{X}$ является* Equiv-ANE-*пространством, то любое частичное G-отображение $\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X}$, $\mathrm{Orb}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{X}}$, допускает G-продолжение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$.*

Теорема Джеймса–Сегала для максимального семейства $\mathcal{F} = \mathrm{Conj}_G$ имеет несколько доказательств: одно из них сводится к нахождению G-CW-комплекса, G-доминирующего исходное G-пространство [13], второе связано с заменой исходного эквивариантного отображения f отображением его коцилиндра, которое G-гомотопически эквивалентно f и дополнительно обладает рядом полезных свойств [2]. (Хотя за возникающим при этом функтором не закреплен специальный термин, мы будем вслед за [6] и [10] называть его *эквивариантным функтором гаммафикации.*) Однако каждое из этих доказательств оперирует с пересечениями орбитных типов точек исходных пространств, что приводит в случае теоремы 1.1 к существенному увеличению семейства $\mathcal{F}$ и к разрушению известных схем рассуждений.

Так, например, эквивариантный функтор гаммафикации существенно улучшает экстензорные свойства G-$\mathcal{F}$-пространств и G-отображений, не меняя их эквивариантный гомотопический класс. Отображение f из теоремы 1.1, подвергнутое такому преобразованию, становится локально $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягким и одновременно слабо $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягким. Для завершения доказательства теоремы 1.1 можно было бы воспользоваться следующей теоремой, являющейся обобщением [2, предложение 4.1] в случае G-$\mathcal{F}$-пространств, однако именно их (G-$\mathcal{F}$-пространств) эквивариантный функтор гаммафикации не сохраняет.

Теорема 1.8. *Если эквивариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ между G-$\mathcal{F}$-пространствами является локально $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягким*[2] *и одновременно слабо $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягким, то f является $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягким и, следовательно, G-гомотопической эквивалентностью.*

Встретившиеся трудности удается обойти с помощью нового подхода к задаче, основанного на ее переводе в категорию ISOV-TOP, объектами которой являются метрические G-пространства, а морфизмами – изовариантные отображения.

Как оказалось, первый (и главный) шаг в доказательстве теоремы 1.1 состоит в изучении инъективных объектов этой категория – *изовариантных абсолютных экстензоров* (или Isov-AE-пространств). Важность их изучения объясняется трактовкой орбитных проекций объектов категории ISOV-TOP как обобщенных главных G-расслоений, а орбитных проекций Isov-AE-пространств – как универсальных обобщенных главных G-расслоений в смысле Пале [14, п. 2.6]. Отметим результат из [15] о том, что пространство орбит E любого Isov-AE-пространства $\mathbb{E}$ осуществляет классификацию G-пространств в смысле Пале [14]. Тем самым, категория ISOV-TOP допускает гомотопическое представление, во многих отношениях сводящее ее изучение к гомотопическим свойствам топологических пространств.

Поскольку ISOV-TOP является естественным расширением категории главных G-расслоений, то столь же естественным (и полезным) является нахождение аналогов тех или иных понятий и фактов теории главных G-расслоений (универсальных расслоений, характеристических классов и др.). Однако до сих пор даже существование Isov-AE-пространств было известно лишь при некоторых ограничениях, налагаемых на размерность и орбитный тип [14], [16], [17]. Следующая теорема окончательно исправляет ситуацию.

Теорема 1.9. *Пусть* Equiv-AE-*пространство $\mathbb{X}_i$ для всех $i \geqslant 1$ является* Isov-*порождающим пространством. Тогда* $\prod\{\mathbb{X}_i \mid i \geqslant 1\} \in \text{Isov-AE}$.

Пространство $\mathbb{X}$ называется Isov-*порождающим*, если для любого метрического G-пространства $\mathbb{Z}$ существует изовариантное отображение $\eta\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$. Если через $\mathrm{Con}\,\mathbb{T}$ обозначить метрический конус над дискретным объединением $\mathbb{T}$ всех однородных пространств $G/H \in G\text{-ANE}$, то счетная степень $\mathbb{J} \rightleftharpoons (\mathrm{Con}\,\mathbb{T})^\omega$ является Isov-порождающим [18]. Поскольку $\mathbb{J}$ является также Equiv-AE-пространством и $\mathbb{J} \cong \mathbb{J}^\omega$, из теоремы 1.9 следует, что $\mathbb{J} \in \text{Isov-AE}$.

---

[2] В [2] вместо локальной Equiv-мягкости использовался другой термин: G-ANE над $\mathbb{Y}$, – отмечающий тесную связь, имеющуюся между теориями абсолютных экстензоров и мягких отображений.

Второй важный шаг в доказательстве теоремы 1.1 состоит в переводе эквивариантной теории в изовариантную, осуществляемом с помощью вводимого функтора Бореля. Если зафиксировать Isov-AE-пространство $\mathbb{W}$, то каждому G-пространству $\mathbb{X}$ сопоставляется G-$\mathcal{F}$-подпространство $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightleftharpoons \{(w,x) \mid G_w \subset G_x, (G_w) \in \mathcal{F}\} \subset \mathbb{W} \times \mathbb{X}$, а G-отображению $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ – изовариантное отображение $E_f\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$, определенное формулой $E_f(w,x) = (w, f(x))$. Получающийся функтор $E_{\mathcal{F}}$ из эквивариантной категории в изовариантную называется *функтором Бореля, порожденным* $\mathcal{F}$.

Отметим, что функтор Бореля переводит эквивариантную гомотопию в изовариантную, следовательно, его можно рассматривать как функтор из категории EQUIV$_{\mathcal{F}}$-HOMOT в категорию ISOV$_{\mathcal{F}}$-HOMOT. В одной из последующих работ автора будет показано, что этот функтор устанавливает эквивалентность эквивариантной гомотопической категории Equiv-ANE-пространств и изовариантной гомотопической категории Isov-ANE-пространств, что позволяет изучение G-гомотопического типа Equiv-ANE-пространств полностью свести к исследованию изовариантного гомотопического типа Isov-ANE-пространств. В свою очередь, посредством углубленного изучения Isov-ANE-пространств все это позволит получить новую информацию об эквивариантном гомотопическом типе Equiv-ANE-пространств.

Следующие наблюдения фиксируют основные моменты преобразования эквивариантной проблемы в изовариантную, что является ключом к доказательству теоремы 1.1: если $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE, то $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE (см. свойство $(*)$ в § 6); G-отображение $p_{\mathbb{X}}\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$, $p_{\mathbb{X}}(w,x) = x$, является G-гомотопической эквивалентностью (см. теорему 6.5), следовательно, $p_{\mathbb{X}}$ является слабой G-гомотопической эквивалентностью. Аналогично, $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE и $p_{\mathbb{Y}}\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) \to \mathbb{Y}$ является G-гомотопической эквивалентностью в случае $\mathbb{Y} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE. Поскольку изовариантное отображение $E_f\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$ замыкает соответствующую диаграмму до коммутативной (т. е. $f \circ p_{\mathbb{X}} = p_{\mathbb{Y}} \circ E_f$), теорема 1.1 редуцируется к своему частному случаю, касающемуся изовариантных отображений.

Теорема 1.10. *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE. *Тогда изовариантное отображение* $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *является G-гомотопической эквивалентностью в том и только в том случае, когда f является слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью.*

Поскольку проблема аппроксимации изовариантных экстензоров объектами более простой природы, например G-CW-комплексами, в ISOV-TOP не разрешима, воспользуемся другими возможностями, предоставляемыми изовариантной категорией. Гомотопическая плотность вложений $\mathbb{X}_H \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ и $\mathbb{Y}_H \hookrightarrow \mathbb{Y}^H$, $(H) \in \mathcal{F}$, для $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ (см. теорему 6.6) влечет равносильность для изовариантного отображения $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ понятий слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической и слабой $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-гомотопической эквивалентностей [3]. Поэтому теорема 1.10 редуцируется к следующей.

Теорема 1.11. *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE. *Тогда изовариантное отображение* $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *является* Isov-*гомотопической эквивалентностью в том и*

[3] Это бесконечномерный аналог так называемого условия “large gap” [19], позволяющего эквивариантную гомотопическую эквивалентность между многообразиями гомотопировать в изовариантную гомотопическую эквивалентность.

только в том случае, когда f *является слабой* $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$*-гомотопической эквивалентностью*[4].

Доказательство теоремы 1.11 удается осуществить с помощью подходящего функтора *изовариантной гаммафикации*, лишенного на сей раз отмеченных недостатков эквивариантного аналога. Оказывается, что изовариантное отображение f из теоремы 1.11, подвергнутое такому преобразованию, не меняет класс изовариантной гомотопии и удовлетворяет условию следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1.12. *Если изовариантное отображение* $f\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ *между* $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$*-ANE-пространствами является локально* $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$*-мягким и одновременно слабо* $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$*-мягким*[5], *то* f *является* $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$*-мягким.*

Поскольку $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-мягкое отображение является Isov-гомотопической эквивалентностью, то тем самым оказываются установленными теорема 1.11, а следовательно, и теоремы 1.10, 1.1. В § 10 формулируются проблемы и гипотезы, касающиеся затронутых в работе вопросов.

§ 2. Предварительные сведения и результаты

Везде далее пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений и если не оговорено противное, предполагаются метрическими (непрерывными); рассматриваются только действия компактных групп Ли.

Приведем основные понятия теории G-пространств [20]. Под действием компактной группы G на пространстве $\mathbb{X}$ понимается непрерывное отображение μ из произведения $G\times\mathbb{X}$ в $\mathbb{X}$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $\mu(g,\mu(h,x))=\mu(g\cdot h,x)$;

2) $\mu(e,x)=x$ для всех $x\in\mathbb{X}$, $g,h\in G$ (здесь e – единица группы G).

Как правило, вместо $\mu(g,x)$ будем записывать $g\cdot x$, или просто gx. Пространство $\mathbb{X}$ с действием группы G называется *G-пространством.* Отображение $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ двух G-пространств называется *G-отображением*, или *эквивариантным отображением*, если $f(g\cdot x)=gf(x)$ для всех $x\in\mathbb{X}$, $g\in G$. Эквивариантное отображение, являющееся одновременно гомеоморфизмом, называется *эквиморфизмом.*

Заметим, что G-пространства и G-отображения образуют категорию, которую мы обозначим через G-TOP или EQUIV-TOP, если ясно, о какой группе G идет речь. Мы свободно будем использовать символ G- или Equiv-, означающий *эквивариантный.* Если $*$ – известное понятие из неэквивариантной топологии, то G-$*$ или Equiv-$*$ обозначает соответствующий эквивариантный аналог. Наоборот, любое понятие, касающееся G-пространств, легко можно преобразовать в неэквивариантное понятие, если положить группу G тривиальной.

Орбитой $G(x)$ точки $x\in\mathbb{X}$ называется подмножество $\{g\cdot x\mid g\in G\}=G\cdot x$, являющееся замкнутым. Естественное отображение $\pi=\pi_{\mathbb{X}}\colon\mathbb{X}\to X$, $x\mapsto G(x)$, пространства $\mathbb{X}$ в пространство факторразбиения $X\rightleftharpoons\mathbb{X}/G$ назовем *орбитной*

[4]То есть отображение $f_H\colon\mathbb{X}_H\to\mathbb{Y}_H$ является гомотопической эквивалентностью для любого $(H)\in\mathcal{F}$ и, кроме того, $\mathbb{X}_H\neq\varnothing$ в том и только в том случае, когда $\mathbb{Y}_H\neq\varnothing$.

[5]Скажем, что изовариантное G-отображение $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ является *слабо* $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$*-мягким*, если $f_H\colon\mathbb{X}_H\to\mathbb{Y}_H$ мягко для любого $(H)\in\mathcal{F}$ при $\mathbb{Y}_H\neq\varnothing$.

проекцией. Пространство факторразбиения X, наделенное факторной топологией и порожденное π, будем называть *пространством орбит.* Ясно, что $G \cdot A = \pi^{-1}\pi(A)$ для любого подмножества $A \subset \mathbb{X}$; если $A \subset \mathbb{X}$ совпадает с $G \cdot A$, то оно наделяется естественным действием группы G и называется *инвариантным* или *G-подмножеством.*

Любое эквивариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ переводит орбиту точки x в орбиту точки $f(x)$, поэтому порождает *индуцированное отображение пространств орбит* $\tilde{f}\colon X \to Y$, $\tilde{f}(G(x)) = G(f(x))$, которое в силу факторности орбитных проекций и непрерывности отображения f является непрерывным.

Для каждой точки $x \in \mathbb{X}$ подмножество $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ является замкнутой подгруппой в группе G и называется *стабилизатором точки x.* Для любой замкнутой подгруппы H (кратко $H < G$) введем в рассмотрение следующие подмножества в $\mathbb{X}$:

$$\mathbb{X}^H = \{x \in \mathbb{X} \mid H \cdot x = x\} = \{x \in \mathbb{X} \mid H \subset G_x\}$$

(*множество H-неподвижных точек*),

$$\mathbb{X}_H = \{x \in \mathbb{X} \mid H = G_x\}, \qquad \mathbb{X}_{(H)} = \{x \in \mathbb{X} \mid H \text{ сопряжена с } G_x\}.$$

Поскольку эквивариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ коммутирует с действием группы, то $f(\mathbb{X}^H) \subset \mathbb{Y}^H$. Обозначим через f^H ограничение $f\restriction\colon \mathbb{X}^H \to \mathbb{Y}^H$.

Эквивариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ называется *изовариантным*, если f сохраняет стабилизаторы, т. е. $G_x = G_{f(x)}$ для всех $x \in \mathbb{X}$. Для изовариантного отображения f обозначим через f_H ограничение $f\restriction\colon \mathbb{X}_H \to \mathbb{Y}_H$. Категорию, образованную G-пространствами и изовариантными отображениями, обозначим через ISOV$_G$-TOP или ISOV-TOP, если ясно, какая группа G рассматривается. Следующий факт – *критерий эквиморфности* – широко известен: изовариантное отображение является эквиморфизмом тогда и только тогда, когда индуцированное отображение орбит является гомеоморфизмом (см. [20, гл. 1, упражнение 10]).

Введем ряд понятий, связанных с продолжением G-отображений из категории $\mathfrak{C}$, совпадающей с ISOV-TOP или EQUIV-TOP. Пространство $\mathbb{X}$ с действием компактной группы G называется *абсолютным окрестностным $\mathfrak{C}$-экстензором* (обозначается $\mathbb{X} \in \mathfrak{C}$-ANE), если каждый морфизм $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{X}$ из $\mathfrak{C}$, определенный на замкнутом G-подмножестве $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ G-пространства $\mathbb{Z}$ и называемый *частичным $\mathfrak{C}$-морфизмом*, может быть продолжен на некоторую G-окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$ до $\mathfrak{C}$-морфизма $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{X}$. Если всегда возможно сделать $\mathbb{U}$ равным $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ называется *абсолютным $\mathfrak{C}$-экстензором*, $\mathbb{X} \in \mathfrak{C}$-AE. Если действующая группа G тривиальна (т. е. пространства рассматриваются без действий), то введенное понятие трансформируется в понятие абсолютных [окрестностных] экстензоров для метрических пространств – A[N]E [21].

Если $\mathfrak{C}$ совпадает с категорией EQUIV-TOP, то абсолютные [окрестностные] $\mathfrak{C}$-экстензоры будут называться эквивариантными [окрестностными] экстензорами (кратко Equiv-A[N]E-пространствами). Если $\mathfrak{C}$ = ISOV-TOP, то абсолютные [окрестностные] $\mathfrak{C}$-экстензоры будут называться изовариантными [окрестностными] экстензорами (кратко Isov-A[N]E-пространствами); Isov-AE-пространство совпадает с универсальным G-пространством в смысле Пале [14], а его пространство орбит классифицирует G-пространства.

Если $\mathfrak{C}$-гомотопия $H\colon \mathbb{X}\times[0,1]\to\mathbb{Y}$ соединяет морфизмы $f,g\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ категории $\mathfrak{C}$, то будем кратко записывать $f\simeq_{\mathfrak{C}} g$, причем если $\mathfrak{C}=\mathrm{EQUIV}$, то эта запись трансформируется в $f\simeq_G g$ или $f\simeq_{\mathrm{Equiv}} g$, а если $\mathfrak{C}=\mathrm{ISOV}$, то – в $f\simeq_{\mathrm{Isov}} g$. Назовем $\mathfrak{C}$-отображение $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ *$\mathfrak{C}$-гомотопической эквивалентностью*, если существует $\mathfrak{C}$-отображение $g\colon\mathbb{Y}\to\mathbb{X}$ такое, что $g\circ f$ и $f\circ g$ $\mathfrak{C}$-гомотопны $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ и $\mathrm{Id}_{\mathbb{Y}}$ соответственно. Легко видеть, что если f является Isov-гомотопической эквивалентностью (Equiv-гомотопической эквивалентностью), то $f_H\colon\mathbb{X}_H\to\mathbb{Y}_H$ ($f^H\colon\mathbb{X}^H\to\mathbb{Y}^H$) является гомотопической эквивалентностью для любой подгруппы $H<G$.

Пусть $\mathcal{F}\subset\mathrm{Conj}_G$. Тогда множество $\mathbb{X}_{\mathcal{F}}\rightleftharpoons\{x\mid(G_x)\in\mathcal{F}\}\subset\mathbb{X}$ будем называть *$\mathcal{F}$-орбитным пучком* $\mathbb{X}$. Скажем, что задано G-пространство $\mathbb{X}$ *орбитного типа* $\mathcal{F}$, или просто *G-$\mathcal{F}$-пространство*, если $\mathbb{X}=\mathbb{X}_{\mathcal{F}}$. Скажем, что G-$\mathcal{F}$-пространство $\mathbb{X}$ является $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$-A[N]E-*пространством*, если каждый частичный морфизм $\varphi\colon\mathbb{A}\to\mathbb{X}$ категории $\mathfrak{C}$, заданный на замкнутом подмножестве G-$\mathcal{F}$-пространства $\mathbb{Z}$, может быть продолжен на все $\mathbb{Z}$ [на некоторую G-окрестность $\mathbb{U}\subset\mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$] до морфизма $\widehat{\varphi}\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{X}$ категории $\mathfrak{C}$. На этом пути возникают $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-A[N]E- и $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-A[N]E-пространства. Доказательство следующей теоремы о продолжении $\mathfrak{C}$-гомотопий устанавливается модификацией стандартной процедуры Борсука.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathbb{X}\in\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$-ANE. Если $\mathfrak{C}$-гомотопия $H\colon\mathbb{A}\times[0,1]\to\mathbb{X}$ соединяет частичные $\mathfrak{C}$-отображения $f,g\colon\mathbb{A}\to\mathbb{X}$, а f допускает продолжение до $\mathfrak{C}$-отображения $\hat f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{X}$, $\mathrm{Orb}(\mathbb{Z})\subset\mathcal{F}$, то существует продолжение $\mathfrak{C}$-гомотопии H до $\mathfrak{C}$-гомотопии $\widehat H\colon\mathbb{Z}\times[0,1]\to\mathbb{X}$, соединяющей $\hat f$ с некоторым $\mathfrak{C}$-отображением $\hat g\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{X}$.*

Доказательство. Рассмотрим инвариантное подмножество $M(\mathbb{X},\mathbb{A})\rightleftharpoons(\mathbb{X}\times\{0\})\cup(\mathbb{A}\times I)$ в $\mathfrak{C}$-пространстве $\mathbb{X}\times I$. Легко видеть, что отображение $\xi\colon M(\mathbb{X},\mathbb{A})\to\mathbb{Z}$, заданное формулой

$$\xi(x,t)=\begin{cases} f(x), & \text{если} \quad (x,t)\in\mathbb{X}\times\{0\},\\ H(x,t), & \text{если} \quad (x,t)\in\mathbb{A}\times I,\end{cases}$$

является непрерывным $\mathfrak{C}$-отображением. Поскольку по условию $\mathbb{Z}\in\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$-ANE, а $M(\mathbb{X},\mathbb{A})\subset\mathbb{X}\times I$ – замкнутое G-подпространство $\mathfrak{C}$-пространства $\mathbb{X}\times I$, то существует окрестность $\mathbb{V}$ множества $M(\mathbb{X},\mathbb{A})\subset\mathbb{X}\times I$ такая, что ξ допускает окрестностное $\mathfrak{C}$-продолжение $\widehat{\xi}\colon\mathbb{V}\to\mathbb{Z}$.

Пусть $\mathbb{U}$ – такая инвариантная окрестность $\mathbb{A}$ в $\mathbb{X}$, что $\mathbb{U}\times I\subset\mathbb{V}$, и пусть $\beta\colon\mathbb{X}\to I$ – такая инвариантная функция Урысона, что $\beta\restriction_{\mathbb{A}}\equiv 1$ и $\beta\restriction_{\mathbb{X}\setminus\mathbb{U}}\equiv 0$. Определим отображение $\alpha\colon\mathbb{X}\times I\to\mathbb{X}\times I$ по формуле $\alpha(x,t)=(x,\beta(x)\cdot t)$ и убедимся в его непрерывности и в том, что $\alpha(\mathbb{X}\times I)\subset\mathbb{V}$.

Покажем, что $\mathfrak{C}$-гомотопия $\widehat H\colon\mathbb{X}\times I\to\mathbb{Z}$, определенная формулой $\widehat H(x,t)=\widehat{\xi}(\alpha(x,t))$, является искомой. Действительно, для любого $x\in\mathbb{X}$

$$\widehat H_0(x)=\widehat H(x,0)=\widehat{\xi}(\alpha(x,0))=\widehat{\xi}(x,0)=\xi(x,0)=f(x).$$

Кроме того, для любой точки $(a,t)\in\mathbb{A}\times I$

$$\widehat H(a,t)=\widehat{\xi}(\alpha(a,t))=\xi(\alpha(a,t))=\xi(a,t)=H(a,t).$$

Теорема доказана.

Эквивариантная гомотопическая эквивалентность тесно связана с понятием G-гомотопической мягкости. Скажем, что эквивариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *G-гомотопически мягко*, если для любой G-гомотопически коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} = \operatorname{Cl}\mathbb{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Y} \end{tikzcd}$$

в категории EQUIV-TOP существует G-отображение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, продолжающее φ и такое, что $f \circ \widehat{\varphi} \simeq_G \psi$. Если в этом определении G-отображение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ с требуемыми свойствами существует при дополнительном условии $\operatorname{Orb}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}$, где $\mathcal{F} \subset \operatorname{Conj}_G$, то возникает понятие *$G$-$\mathcal{F}$-гомотопически мягкого отображения.*

Несложно проверяется, что любое G-$\mathcal{F}$-гомотопически мягкое G-отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью. Ясно также, что если $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является G-гомотопически мягким, то оно является Equiv-гомотопической эквивалентностью. Обратное верно при следующем дополнительном условии:

$(*)$ если $\mathbb{X} \in \operatorname{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE, то любая Equiv-гомотопическая эквивалентность $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является G-$\mathcal{F}$-гомотопически мягкой.

Для доказательства $(*)$ рассмотрим G-отображение $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$, G-гомотопически обратное к f. Поскольку G-отображения $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{X}$ и $g \circ (f \circ \varphi) = g \circ \psi \restriction_{\mathbb{A}}\colon \mathbb{A} \to \mathbb{X}$ G-гомотопны, то по теореме 2.1 о продолжении G-гомотопии существует G-отображение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, продолжающее φ и G-гомотопное $g \circ \psi$. Окончательно имеем $f \circ \widehat{\varphi} \simeq_G (f \circ g) \circ \psi \simeq_G \psi$.

Отсюда и из теоремы 2.1 о продолжении эквивариантной гомотопии следует

Предложение 2.2. *Если* $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \operatorname{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE *имеют один и тот же эквивариантный гомотопический тип, то* $\mathbb{X} \in \operatorname{Equiv}_{\mathcal{F}}$-AE *тогда и только тогда, когда* $\mathbb{Y} \in \operatorname{Equiv}_{\mathcal{F}}$-AE.

Доказательство. Если $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ – Equiv-гомотопическая эквивалентность, то в силу свойства $(*)$ отображение f является G-гомотопически мягким. Поэтому для частичного G-отображения $\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Y}$, $\operatorname{Orb}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}$, существует такое G-отображение $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, что $\varphi \simeq_G f \circ \psi$. Поскольку $\mathbb{X} \in \operatorname{Equiv}_{\mathcal{F}}$-AE, существует G-продолжение $\widehat{\psi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ отображения ψ. В итоге имеем $\varphi \simeq_G f \circ \psi$, а $f \circ \psi$ имеет G-продолжение $f \circ \widehat{\psi}$ на все $\mathbb{Z}$. Применяем теорему 2.1, в силу которой φ имеет G-продолжение $f \circ \widehat{\psi}$ на все $\mathbb{Z}$. Предложение доказано.

Пусть заданы два G-отображения $\mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{A} \xleftarrow{f} \mathbb{B}$. *Послойным произведением* G-пространств $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}$ относительно отображений g и f называется G-подмножество $\{(c,b) \mid g(c) = f(b)\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{B}$, которое обозначается через $\mathbb{C}_g \times_f \mathbb{B}$. Проектирования $\mathbb{D} = \mathbb{C}_g \times_f \mathbb{B}$ на сомножители $\mathbb{C}$ и $\mathbb{B}$ определяют G-отображения $\check{f}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ и $\check{g}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{B}$. Будем $\check{f}$ называть *отображением, параллельным* f, а $\check{g}$ – *отображением, параллельным* g, и записывать $\check{f} \| f$ и $\check{g} \| g$.

Известно, что для любой четырехугольной коммутативной G-диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "g"] \\ \mathbb{B} \arrow[r, "f"] & \mathbb{A} \end{tikzcd}$$

существует единственное G-отображение $h\colon \mathbb{E} \to \mathbb{D}$, разбивающее соответствующую диаграмму на два коммутативных треугольника $\check{g} \circ h = \beta$ и $\check{f} \circ h = \alpha$.

Отметим, что G-отображение $f \circ \check{g} = g \circ \check{f}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{A}$ является произведением G-отображений g и f в категории G-TOP_A G-пространств над $\mathbb{A}$. Наиболее важный пример послойного произведения в теории топологических групп преобразований доставляют изовариантные отображения.

Предложение 2.3. *Пусть $h\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ – изовариантное отображение, $\tilde{h}\colon Y \to X$ – отображение пространств орбит, индуцированное h. Тогда $\mathbb{Y}$ – послойное произведение $Y_{\tilde{h}} \times_{\pi_{\mathbb{X}}} \mathbb{X}$, причем h и $\tilde{h}$, а также орбитные проекции $\pi_{\mathbb{Y}}$ и $\pi_{\mathbb{X}}$ являются параллельными (пространства орбит рассматриваются с тривиальными действиями группы G).*

Доказательство легко следует из сформулированного выше критерия эквиморфности (см. [20, гл. 1, упражнение 10]).

§ 3. Изовариантные абсолютные экстензоры

В классе произведений G-пространств изовариантные абсолютные экстензоры описываются теоремой 1.9, пользоваться которой, однако, будем в следующем уточненном виде.

Теорема 3.1. *Пусть* Equiv-AE-*пространство $\mathbb{X}_i$ для каждого $i \geqslant 1$ является* Isov-*порождающим пространством. Тогда для любого частичного G-отображения $\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X} \rightleftharpoons \prod\{\mathbb{X}_i \mid i \geqslant 1\}$ существует G-отображение $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, являющееся продолжением φ и изовариантное на дополнении (т. е. $\psi \restriction_{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{A}}$ есть изовариантное отображение).*

Доказательство. Так как $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$ замкнуто, возможно выбрать последовательности окрестностей $\mathbb{Z} = \mathbb{U}_0 \Supset \mathbb{U}_1 \Supset \cdots$ и G-функций $\chi_i\colon \mathbb{Z} \to [0,1]$, $i \geqslant 1$, такие, что $\bigcap \mathbb{U}_i = \mathbb{A}$, $\chi_i^{-1}(0) \supset \mathbb{Z} \setminus \mathbb{U}_i$ и $\chi_i^{-1}(1) \supset \mathbb{U}_{i+1}$ (напомним, что вложение $A \subset B$ называется *строгим* и записывается $A \Subset B$, если $\mathrm{Cl}\, A \subset \mathrm{Int}\, B$).

Поскольку $\mathbb{X} \in$ Equiv-AE, существует эквивариантное продолжение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ отображения φ. Теперь, отправляясь от $\widehat{\varphi}$, найдем такое G-отображение $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, продолжающее $\varphi = \widehat{\varphi} \restriction_{\mathbb{A}}$, что $\psi \restriction_{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{A}}$ – изовариантное отображение. Для этого представим отображение $\widehat{\varphi}$ в виде $\prod \widehat{\varphi}_i$, где каждое отображение $\widehat{\varphi}_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}_i$ эквивариантно. Зафиксируем изовариантное отображение $e_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}_i$ (существующее, так как $\mathbb{X}_i$ является Isov-порождающим), и пусть $H_i\colon \mathbb{Z} \times I \to \mathbb{X}_i$ является Equiv-гомотопией, соединяющей e_i с $\widehat{\varphi}_i$ (она существует, так как $\mathbb{X}_i \in$ Equiv-AE). Тогда искомое отображение ψ задается формулой

$$\psi \restriction_{\mathbb{A}} = \widehat{\varphi} \restriction_{\mathbb{A}} = \varphi,$$
$$\bigl(\psi \restriction_{\mathbb{U}_i \setminus \mathbb{U}_{i+1}}\bigr)(z) = \widehat{\varphi}_1 \times \cdots \times \widehat{\varphi}_{i-1} \times H_i\bigl(z, \chi_i(z)\bigr) \times e_{i+1} \times \cdots, \qquad i \geqslant 0.$$

Проверки непрерывности ψ, а также его изовариантности на дополнении несложны и по этой причине не приводятся. Теорема доказана.

Зафиксируем замкнутое топологическое вложение $j\colon X \hookrightarrow L$ пространства орбит произвольного G-пространства $\mathbb{X}$ в некоторое линейное нормированное пространство L [22]. Поскольку счетная степень $\mathbb{J}$ метрического конуса $\operatorname{Con}\mathbb{T}$ над $\mathbb{T} = \sqcup\{G/H \mid G/H \in G\text{-ANE}\}$ является Isov-порождающим [18], существует изовариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{J}$. Очевидно, что произведение $(j \circ p) \times f$ есть замкнутое топологическое G-вложение $\mathbb{X}$ в G-пространство $\mathbb{Y} \rightleftharpoons L \times \mathbb{J}$, которое, как легко видеть, есть Isov-AE. Таким образом, нами доказан следующий результат.

Теорема 3.2. *Любое G-пространство допускает замкнутое G-вложение в* Isov-AE-*пространство* $L \times \mathbb{J}$.

Пусть $\mathfrak{R}$ – множество всех неприводимых ортогональных представлений G (включая тривиальное представление), а $\mathbb{R}_\varrho$ и $\mathbb{D}_\varrho$ – пространство представления $\varrho \in \mathfrak{R}$ и его единичный шар соответственно. *Эквивариантным гильбертовым пространством* $\mathbb{L}_2$ назовем произведение

$$\biggl\{(v_\varrho) \in \biggl(\bigoplus_{\varrho\in\mathfrak{R}} \mathbb{R}_\varrho\biggr)^{\omega} \biggm| \sum \|v_\varrho\|^2 < \infty\biggr\},$$

а *эквивариантным гильбертовым кубом* $\mathbb{Q}$ (лишь для компактной метрической группы G) назовем $\bigl(\prod\{\mathbb{D}_\varrho \mid \varrho \in \mathfrak{R}\}\bigr)^{\omega}$.

Без доказательства отметим, что Isov-AE-пространствами являются эквивариантное гильбертово пространство $\mathbb{L}_2$ и эквивариантный гильбертов куб $\mathbb{Q}$. Произвольное компактное Isov-AE-пространство $\mathbb{X}$, будучи умноженным на гильбертов куб Q, становится эквиморфным эквивариантному гильбертову кубу $\mathbb{Q}$. Еще одним примером Isov-AE-пространства является пространство $C(G, L)$ (с метрикой равномерной сходимости) всех непрерывных отображений $f\colon G \to L$ в гильбертово пространство L веса $w(G)$, наделенное (непрерывным) действием группы G по формуле

$$(g \cdot f)(h) = f(g^{-1} \cdot h), \qquad f \in C(G, L), \quad g, h \in G.$$

Эти и другие результаты теории изовариантных экстензоров будут изложены в последующих публикациях автора.

Любое Isov-A[N]E-пространство $\mathbb{X}$ в силу теоремы 3.2 допускает замкнутое G-вложение в G-пространство $L \times \mathbb{J}$, удовлетворяющее утверждению в теореме 3.1. Поскольку $\mathbb{X} \in$ Isov-A[N]E, существует изовариантная ретракция $r\colon L \times \mathbb{J} \to \mathbb{X}$ [окрестностная изовариантная ретракция $r\colon \mathbb{U} \to \mathbb{X}$]. Из теоремы 3.1 отсюда легко вывести важное соотношение между инъективными объектами изовариантной и эквивариантной категорий.

Теорема 3.3. *Любое* Isov-A[N]E-*пространство* $\mathbb{X}$ *удовлетворяет утверждению в теореме* 3.1, *и*, *следовательно*, *любое* Isov-A[N]E-*пространство является* Equiv-A[N]E-*пространством*.

Легко привести пример Equiv-AE-пространства $\mathbb{Z} \notin$ Isov-ANE. Следующие результаты позволяют судить о степени расхождения этих двух классов: $\mathbb{X} \in$ Equiv-ANE влечет $\{\mathbb{X}^H \mid H < G\} \in$ equi-LAE, а $\mathbb{X} \in$ Isov-ANE влечет $\{\mathbb{X}_H \mid H < G\} \in$ equi-LAE; $\operatorname{Con}\mathbb{X} \in$ Isov-AE и $\mathbb{X}^G \in$ AE влечет $\mathbb{X} \in$ Isov-AE.

§ 4. Мягкие отображения

Далее в этом параграфе через $\mathcal{D}$ обозначим квадратную коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} = \mathrm{Cl}\,\mathbb{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Y} \end{tikzcd}$$

в категории $\mathfrak{C}$, совпадающей с одной из категорий EQUIV-TOP или ISOV-TOP, а через $\widetilde{\mathcal{D}}$ – порожденную ею коммутативную диаграмму пространств орбит.

Будем говорить, что морфизм φ есть *частичное поднятие морфизма* ψ *относительно* f. Скажем, что *задача продолжения частичного поднятия для* $\mathcal{D}$ *разрешима глобально* (*локально*), если существует морфизм $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ ($\widehat{\varphi}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{X}$, где $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ – окрестность $\mathbb{A}$), продолжающий φ и такой, что $f \circ \widehat{\varphi} = \psi$ (соответственно, $f \circ \widehat{\varphi} = \psi \restriction_{\mathbb{U}}$). Будем также говорить, что $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ ($\widehat{\varphi}\colon \mathbb{U} \to \mathbb{X}$) есть *глобальное* (*локальное*) *поднятие морфизма* ψ, или $\widehat{\varphi}$ есть *глобальное* (*локальное*) *расщепление* коммутативной диаграммы $\mathcal{D}$.

Если $\mathbb{Z} = \mathbb{Y}$, то задача глобального продолжения частичного поднятия для $\mathcal{D}$ трансформируется в *задачу глобального продолжения частичного сечения отображения* f.

Определение 4.1. Пусть $\mathcal{F} \subset \mathrm{Conj}_G$. Морфизм $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ категории $\mathfrak{C}$ называется (*локально*) $\mathfrak{C}_{\mathcal{F}}$*-мягким*, если для любой квадратной коммутативной диаграммы $\mathcal{D}$ категории $\mathfrak{C}$, в которой $\mathbb{Z}$ – G-$\mathcal{F}$-пространство, задача продолжения частичного поднятия разрешима (локально) глобально[6].

Отметим, что введенные понятия можно интерпретировать как инъективные объекты соответствующих категорий морфизмов. Приведем наиболее простые примеры $\mathfrak{C}$-мягких отображений: если $\mathbb{Z} \in$ Equiv-AE, то $\mathrm{pr}\colon \mathbb{Y} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}$ является Equiv-мягким отображением, а изовариантное отображение $\varepsilon \rightleftharpoons \mathrm{pr} \restriction\colon E(\mathbb{Y}, \mathbb{Z}) \rightleftharpoons \{(y, z) \mid G_y \subset G_z\} \to \mathbb{Y}$ является Isov-мягким отображением.

Еще один пример мягкого морфизма доставляет конструкция пространства путей $\mathbb{Y}^I \rightleftharpoons C([0,1], \mathbb{Y})$. Введем в рассмотрение G-отображение $p\colon \mathbb{Y}^I \to \mathbb{Y}$, заданное формулой $p(\lambda) = \lambda(0)$. Следующий факт является несложной переформулировкой теоремы 2.1 о продолжении эквивариантной гомотопии и устанавливается аналогично теореме 7.1.

Предложение 4.2. *Если* $\mathbb{Y}$ *есть* Equiv-ANE, *то отображение* $p\colon \mathbb{Y}^I \to \mathbb{Y}$ *является* Equiv*-мягким*.

Несложными рассуждениями устанавливается, что $\mathfrak{C}$-мягкое отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является G-гомотопической эквивалентностью, а также $\mathfrak{C}$*-расслоением Гуревича*. Последнее означает, что для любого коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \times [0,1] \cup \mathbb{Z} \times \{0\} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z} \times [0,1] \arrow[r, "\Psi"] & \mathbb{Y} \end{tikzcd}$$

[6] В случае $\mathfrak{C} =$ EQUIV-TOP возникает понятие $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягкого отображения, а в случае $\mathfrak{C} =$ ISOV-TOP – понятие $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-мягкого отображения.

в категории $\mathfrak{C}$, где $\mathbb{A} \subset \mathbb{Z}$ – замкнутое $\mathfrak{C}$-подпространство, существует $\mathfrak{C}$-отображение $\widehat{\Phi}\colon \mathbb{Z} \times [0,1] \to \mathbb{X}$, продолжающее Φ и такое, что $f \circ \widehat{\Phi} = \Psi$. Оказывается, имеет место обратное утверждение к приведенному.

Теорема 4.3. *Отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является $\mathfrak{C}$-мягким в том и только в том случае, когда f является $\mathfrak{C}$-расслоением Гуревича и одновременно является $\mathfrak{C}$-гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство достаточности основывается на следующих двух леммах, известных для тривиальных действий (см. [23]).

Лемма 4.4. *Если $\mathfrak{C}$-расслоение Гуревича $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является $\mathfrak{C}$-гомотопической эквивалентностью, то f послойно $\mathfrak{C}$-стягиваемо, т.е. существует такая $\mathfrak{C}$-гомотопия $H\colon \mathbb{X} \times I \to \mathbb{X}$, что $H_0 = \mathrm{Id}$, $f \circ H_t = f$ и $H_1 = s \circ f$ для некоторого $\mathfrak{C}$-сечения $s\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$.*

Доказательство. Пусть $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ – такое $\mathfrak{C}$-отображение, что $f \circ g \overset{F}{\simeq}_{\mathfrak{C}} \mathrm{Id}_{\mathbb{Y}}$ и $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}} \overset{H}{\simeq}_{\mathfrak{C}} g \circ f$. Покажем, что $\mathfrak{C}$-гомотопию F без потери общности можно считать постоянной гомотопией, т. е. $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{Y}}$. В самом деле, $\mathfrak{C}$-гомотопия F частично поднята относительно f: $f \circ g = F_0$. Поскольку f – $\mathfrak{C}$-расслоение Гуревича, то F поднимается до такой $\mathfrak{C}$-гомотопии $\widetilde{F}\colon \mathbb{Y} \times [0,1] \to \mathbb{X}$ относительно f, что $\widetilde{F}_0 = g$. Ясно, что для $\mathfrak{C}$-отображения $g' = \widetilde{F}_1$ справедливо $f \circ g' = \mathrm{Id}_{\mathbb{Y}}$ и $g' \circ f \simeq_{\mathfrak{C}} \widetilde{F}_0 \circ f = g \circ f \simeq_{\mathfrak{C}} \mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$.

Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{Y}}$ и $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}} \overset{H}{\simeq}_{\mathfrak{C}} g \circ f$. Рассмотрим $\mathfrak{C}$-гомотопию

$$G \rightleftharpoons H \cup (g \circ f \circ H^{-1})\colon \mathbb{X} \times [0,2] \to \mathbb{X},$$

соединяющую $\mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$ с $g \circ f$, а также постоянную $\mathfrak{C}$-гомотопию $K\colon \mathbb{X} \times [0,2] \to \mathbb{Y}$, заданную формулой $K_t = f$ для всех $t \in [0,2]$.

Поскольку $f \circ H = f \circ (g \circ f \circ H)$, то легко видеть, что $f \circ G\colon \mathbb{X} \times [0,2] \to \mathbb{Y}$ и $K\colon \mathbb{X} \times [0,2] \to \mathbb{Y}$ соединяются $\mathfrak{C}$-гомотопией, которая постоянна на $\mathbb{A} = \mathbb{X} \times \{0,2\}$. Так как f является $\mathfrak{C}$-расслоением Гуревича, существует такая $\mathfrak{C}$-гомотопия $T\colon \mathbb{X} \times [0,2] \to \mathbb{X}$, что $T_0 = G_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{X}}$, $T_2 = G_2 = g \circ f$ и $f \circ T = f$. Тем самым, T является послойным $\mathfrak{C}$-стягиванием.

Лемма 4.5. *Если $\mathfrak{C}$-расслоение Гуревича $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является одновременно и послойно $\mathfrak{C}$-стягиваемым, то f является $\mathfrak{C}$-мягким.*

Доказательство. Рассмотрим квадратную коммутативную диаграмму $\mathcal{D}$ в категории $\mathfrak{C}$, и пусть $\mathfrak{C}$-гомотопия $H\colon \mathbb{X} \times I \to \mathbb{X}$ такова, что $H_1 = \mathrm{Id}$, $f \circ H_t = f$ и $H_0 = s \circ f$ для некоторого $\mathfrak{C}$-сечения $s\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$. Тогда введем в рассмотрение $\mathfrak{C}$-отображение $\Phi\colon \mathbb{A} \times [0,1] \cup \mathbb{Z} \times \{0\} \to \mathbb{X}$, заданное формулами $\Phi(a,t) = H(\varphi(a),t)$ и $\Phi(z,0) = s \circ \psi(z)$, а также $\mathfrak{C}$-отображение $\Psi\colon \mathbb{Z} \times [0,1] \to \mathbb{Y}, \Psi(z,t) = \psi(z)$. Поскольку $f \circ \Phi = \Psi \restriction_{\mathbb{A} \times [0,1] \cup \mathbb{Z} \times \{0\}}$, по условию существует $\mathfrak{C}$-отображение $\widehat{\Phi}\colon \mathbb{Z} \times [0,1] \to \mathbb{X}$, продолжающее Φ и такое, что $f \circ \widehat{\Phi} = \Psi$. Ясно, что искомым $\mathfrak{C}$-продолжением φ является $\widehat{\Phi}_1$. Лемма доказана.

Скажем, что G-отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является *слабо* $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-*мягким*, если отображение $f^H\colon \mathbb{X}^H \to \mathbb{Y}^H$ мягко для любого $(H) \in \mathcal{F}$ при $\mathbb{Y}^H \neq \varnothing$.

Предложение 4.6. *Если G-отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является* $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$*-мягким, то f является слабо* $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$*-мягким.*

Замечание 4.7. Аналогично доказывается, что $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-мягкое отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является слабо $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-мягким.

Доказательство предложения 4.6. Для любого частичного отображения $W \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X}^H$, $(H) \in \mathcal{F}$, введем в рассмотрение частичное G-отображение $G/H \times W \hookleftarrow G/H \times A \xrightarrow{\Phi} \mathbb{X}$, заданное формулой $\Phi(gH, a) = g \cdot a$. Предположим, что $f \circ \varphi$ допускает продолжение $\psi\colon W \to \mathbb{Y}^H$. Тогда $\Theta \rightleftharpoons f \circ \Phi\colon G/H \times A \to \mathbb{Y}$ допускает G-продолжение $\Psi\colon G/H \times W \to \mathbb{Y}$, заданное формулой $\Psi(gH, w) = g \cdot w$. Воспользуемся $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягкостью отображения f: существует G-отображение $\widehat{\Theta}\colon G/H \times W \to \mathbb{X}$, продолжающее Θ и накрывающее Ψ. Ограничение $\widehat{\Theta}$ на $(e \cdot H) \times W$, как легко проверить, является искомым продолжением отображения φ.

Изучим взаимоотношение между мягкими морфизмами различных категорий.

Теорема 4.8. *Пусть $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ – изовариантное отображение. Если f является* (*локально*) Isov*-мягким отображением, то оно является* (*локально*) Equiv*-мягким.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} = \mathrm{Cl}\,\mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{X} \\ \cap & & \downarrow f \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y} \end{array} \tag{4.1}$$

в категории EQUIV-TOP. Ясно, что формулой "$z_1 \approx z_2$ в том и только в том случае, когда z_i лежат на одной орбите, а также $\psi(z_1) = \psi(z_2)$" вводится отношение эквивалентности на $\mathbb{Z}$. Естественное отображение $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}' \rightleftharpoons \mathbb{Z}/\approx$ является совершенным G-отображением, индуцирующим тождественное отображение пространств орбит. Тем самым, $\mathbb{Z}'$ является метрическим G-пространством, а $\mathbb{A}' = \mathbb{A}/\approx$ есть его замкнутое G-подпространство.

Легко проверяется, что G-отображения φ и ψ факторизуются через изовариантные отображения $\varphi'\colon \mathbb{A}' \to \mathbb{X}$ и $\psi'\colon \mathbb{Z}' \to \mathbb{Y}$, т. е. $\varphi = \varphi' \circ h$ и $\psi = \psi' \circ h$. Если f является Isov-мягким отображением, то возникает коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}' = \mathrm{Cl}\,\mathbb{A}' & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbb{X} \\ \cap & & \downarrow f \\ \mathbb{Z}' & \xrightarrow{\psi'} & \mathbb{Y} \end{array}$$

в категории ISOV-TOP, который допускает изовариантное расщепление $\widehat{\varphi}\,'\colon \mathbb{Z}' \to \mathbb{X}$. Легко видеть, что $\widehat{\varphi}\,' \circ h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ есть искомое G-расщепление коммутативного квадрата (4.1).

Локальный вариант теоремы устанавливается аналогично.

Ясно, что ограничение Isov-мягкого отображения на полный прообраз инвариантного подмножества вновь является Isov-мягким. Следующие два результата касаются обратной ситуации.

Теорема 4.9. *Пусть* $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *является изовариантным отображением. Если* f *является локально* Isov*-мягким отображением, а* $f_G\colon \mathbb{X}_G \to \mathbb{Y}_G$ *и* $g \rightleftharpoons f\restriction\colon \mathbb{X}\setminus\mathbb{X}_G \to \mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}_{\mathbb{G}}$ *являются* Isov*-мягкими отображениями, то* f *является* Isov*-мягким.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{X}$ допускает замкнутое G-вложение $i\colon \mathbb{X}\hookrightarrow\mathbb{W}$ в Isov-AE-пространство $\mathbb{W}$ (теорема 3.2), то $f\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ – ограничение изовариантной проекции

$$\varepsilon\colon \mathbb{Z} \rightleftharpoons \{(y,w)\in\mathbb{Y}\times\mathbb{W} \mid G_y < G_w\} \to \mathbb{Y}, \qquad \varepsilon(y,w)=y,$$

на копию $\mathbb{X}$ при диагональном вложении $\mathbb{X}\hookrightarrow\mathbb{Z}$, $x\mapsto(f(x),i(x))$.

В силу теоремы 6.1 (см. далее) изовариантное отображение ε является Isov-мягким. Если мы покажем, что существует послойная изовариантная ретракция $R\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{X}$ (т. е. $\varepsilon = f\circ R$), то Isov-мягкость f будет установлена. Поскольку f_G является Isov-мягким отображением, а $\mathbb{X}_G\subset\mathbb{Z}_G$ замкнуто, то, не теряя общности, можно считать, что исходно $\mathbb{X}_G$ совпадало с $\mathbb{Z}_G$. Так как f является локально Isov-мягким отображением, можно также считать, что имеется окрестностная послойная изовариантная ретракция $r\colon \mathbb{U}\to\mathbb{X}$. Поэтому $r(\mathrm{Bd}(\mathbb{U}))\subset\mathbb{X}\setminus\mathbb{X}_G$.

Поскольку $g = f\restriction_{\mathbb{X}\setminus\mathbb{X}_G}$ является Isov-мягким отображением, коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Bd}(\mathbb{U}) & \xrightarrow{r\restriction} & \mathbb{X}\setminus\mathbb{X}_G \\
\cap & & \big\downarrow g \\
\mathbb{Z}\setminus\mathbb{U} & \xrightarrow{\varepsilon\circ r} & \mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}_G
\end{array}$$

расщепляема, что ведет к построению послойного изовариантного продолжения $r_1\colon \mathbb{Z}\setminus\mathbb{U}\to\mathbb{X}\setminus\mathbb{X}_{\mathbb{G}}$. Совместно r и r_1 определяют искомую послойную изовариантную ретракцию $R\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{X}$, $R=r$ на $\mathbb{U}$ и $R=r_1$ на $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{U}$.

Доказательство следующего утверждения получается несложной модификацией рассуждений из [2, п. 3.1] и по этой причине не приводится.

Теорема 4.10. *Изовариантное отображение* $f\colon \mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ *является* Isov*-мягким в каждом из следующих случаев*:

1) *существует такая бесконечная растущая последовательность* $\mathbb{Y}_1\subset\mathbb{Y}_2\subset\mathbb{Y}_3\subset\cdots$, $\mathbb{Y}_n\subset\operatorname{Int}\mathbb{Y}_{n+1}$, *замкнутых* G*-подмножеств* $\mathbb{Y}$, *что* f *является* Isov*-мягким отображением над каждым* $\mathbb{Y}_n$;

2) *существует такое открытое* G*-покрытие* $\{\mathbb{U}_\lambda\}\in\operatorname{cov}(\mathbb{Y})$, *что* f *является* Isov*-мягким отображением над каждым* $\mathbb{U}_\lambda$.

§ 5. Изовариантные экстензоры и скрученные произведения

Рассмотрим компактную группу G и метрическое H-пространство $\mathbb{S}$, где $H<G$, а также диагональное действие группы H на произведении $G\times\mathbb{S}$, определенное формулой

$$h\cdot(g,y)\rightleftharpoons(g\cdot h^{-1},h\cdot y),$$

которое является свободным. Обозначим через $[g,y]$ элемент

$$H\cdot(g,y)=\{(g\cdot h^{-1},h\cdot y)\ \mid h\in H\}$$

пространства орбит $(G\times\mathbb{S})/H$. Оказывается, что формулой $g_1\cdot[g,y]=[g_1\cdot g,y]$, где $g,g_1\in G$, $y\in\mathbb{S}$, корректным образом задается непрерывное действие всей группы G на пространстве орбит $(G\times\mathbb{S})/H$, которое называется *скрученным произведением* и обозначается через $G\times_H\mathbb{S}$.

Назовем *отображением среза* $\mathbb{X}$ любое G-отображение $\alpha\colon\mathbb{X}\to G/H$, $H<G$, в однородное пространство. Известно, что любая орбита $G(x)\subset\mathbb{X}$ имеет окрестность $\mathbb{U}$, допускающую отображение среза $\varphi\colon\mathbb{U}\to G/G_x\cong_G G(x)$, которое тождественно на этой орбите [20]. Понятие скрученного произведения естественным образом возникает при изучении G-пространства, допускающего отображение среза, ввиду эквивалентности следующих условий:

1) $\mathbb{X}\cong_G G\times_H\mathbb{S}$;
2) существует отображение среза $\varphi\colon\mathbb{X}\to G/H$, $\varphi^{-1}([H])=\mathbb{S}$.

Другие свойства скрученного произведения (включая его функториальные свойства) подробно излагаются, например, в [20].

Скажем, что изовариантное отображение $f\colon\mathbb{X}\to\mathbb{Y}$ допускает (*нетривиальную*) *трубчатую структуру*, если имеются отображения срезов $\varphi\colon\mathbb{X}\to G/H$ и $\psi\colon\mathbb{Y}\to G/H$, $H\neq G$, для которых $\varphi=\psi\circ f$. В этом случае рассмотрим изовариантное H-отображение

$$g\rightleftharpoons f\restriction\colon\mathbb{S}\rightleftharpoons\varphi^{-1}[H]\to\mathbb{T}\rightleftharpoons\psi^{-1}[H].$$

Тогда f можно представить с помощью скрученного произведения следующим образом:

$$f=\operatorname{Id}\times f'\colon G\times_H\mathbb{S}=\mathbb{X}\to G\times_H\mathbb{T}=\mathbb{Y},\qquad [g,s]\mapsto[g,f'(s)]=[g,f(s)].$$

Теперь изучим взаимоотношения свойств мягкости таких отображений f и g.

Теорема 5.1. *Если отображение f является* (*локально*) Isov_G*-мягким, то отображение g является* (*локально*) Isov_H*-мягким.*

Доказательство. Разберем лишь случай Isov_G-мягкого f, для чего рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}=\operatorname{Cl}\mathbb{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{S} \arrow[d, "g"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{T}
\end{tikzcd}\tag{5.1}$$

в категории ISOV_H-TOP, применив к которому функтор скрученного произведения, получим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd}
G\times_H\mathbb{A} \arrow[r, "\operatorname{Id}\times\varphi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & G\times_H\mathbb{S} \arrow[d, "f"] \\
G\times_H\mathbb{Z} \arrow[r, "\operatorname{Id}\times\psi"] & G\times_H\mathbb{T}
\end{tikzcd}\tag{5.2}$$

в категории ISOV_G-TOP. Согласно условию теоремы коммутативный квадрат (5.2) возможно G-расщепить отображением $\widehat{\varphi}\colon G\times_H\mathbb{Z}\to G\times_H\mathbb{S}$. Если $\widehat{\varphi}[e,z]=[g,s]$, где $e\in G$ – единица группы, то в силу коммутативности диаграммы имеем $[e,\psi(z)]=[g,f(s)]$. Поэтому $g\in H$ и $\widehat{\varphi}[e,z]=[e,g^{-1}s]$, т. е. $\widehat{\varphi}(\mathbb{Z})\subset\mathbb{S}$. Следовательно, искомое H-расщепление коммутативного квадрата (5.1) на две треугольные диаграммы получается ограничением $\widehat{\varphi}$ на $\mathbb{Z}\subset G\times_H\mathbb{Z}$.

Локальный вариант теоремы устанавливается аналогично.

Теорема 5.2. *Если отображение g является* (*локально*) Isov_H-*мягким*, *то f является* (*локально*) Isov_G-*мягким*.

Доказательство. Разберем лишь случай Isov_H-мягкого отображения g, для чего рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{A} = \operatorname{Cl}\mathbb{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{X} & \equiv & G \times_H \mathbb{S} & \xrightarrow{\varphi} & G/H \\ \cap & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{Id}\times g} & & \Big\| {\scriptstyle \operatorname{Id}} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Y} & \equiv & G \times_H \mathbb{T} & \xrightarrow{\psi} & G/H \end{array} \tag{5.3}$$

в категории ISOV_G-TOP. Представим $\mathbb{Z}$ в виде $G \times_H \overline{\mathbb{Z}}$, а $\mathbb{A}$ – в виде $G \times_H \bar{\mathbb{A}}$, где $\bar{\mathbb{A}} \rightleftharpoons (\varphi \circ \alpha)^{-1}([H]) = \alpha^{-1}(\mathbb{S})$ и $\overline{\mathbb{Z}} \rightleftharpoons (\psi \circ \beta)^{-1}([H]) = \beta^{-1}(\mathbb{T})$ являются H-пространствами. Естественным образом возникающий коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{A}} = \operatorname{Cl}\bar{\mathbb{A}} & \xrightarrow{\alpha\restriction} & \mathbb{S} \\ \cap & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \overline{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\beta\restriction} & \mathbb{T} \end{array}$$

в категории ISOV_H-TOP по условию теоремы допускает H-расщепление $\chi\colon \overline{\mathbb{Z}} \to \mathbb{S}$. Применив функтор скрученного произведения, получим искомое G-расщепление $\operatorname{Id} \times_H \chi\colon G \times_H \overline{\mathbb{Z}} \to G \times_H \mathbb{S} = \mathbb{X}$ коммутативного квадрата (5.3).

Локальный вариант теоремы устанавливается аналогично.

§ 6. Конструкция А. Бореля

Рассмотрим многозначное отображение $\mathcal{E}\colon \mathbb{Y} \rightsquigarrow \mathbb{X}$, определенное формулой $\mathcal{E}(y) = \mathbb{X}^{G_y}$, и его график $E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \rightleftharpoons \{(y,x) \mid G_y \subset G_x\}$, являющийся инвариантным подмножеством множества $\mathbb{Y} \times \mathbb{X}$. Поскольку $G_{(y,x)} = G_y \cap G_x = G_y$, естественная проекция $\varepsilon\colon E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \to \mathbb{Y}$ является изовариантным отображением.

Теорема 6.1. *Пространство $\mathbb{X}$ является* Equiv-AE (*соответственно*, Equiv-ANE) *в том и только в том случае*, *когда для любого G-пространства $\mathbb{Y}$ изовариантное отображение $\varepsilon\colon E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \to \mathbb{Y}$ является изовариантно мягким* (*соответственно*, *изовариантно локально мягким*).

Замечание 6.2. Аналогично можно доказать, что если $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE, то для любого G-пространства $\mathbb{Y}$ отображение $\varepsilon\colon E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \to \mathbb{Y}$ является локально $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-мягким.

Доказательство теоремы 6.1. Чтобы проверить необходимость, рассмотрим в изовариантной категории допустимую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} = \operatorname{Cl}\mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \\ \cap & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y} \end{array}$$

Поскольку $\mathbb{X} \in$ Equiv-AE, существует эквивариантное продолжение $\varphi'\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, совпадающее с $\mathrm{pr}_{\mathbb{X}} \circ \varphi$ на $\mathbb{A}$, где $\mathrm{pr}_{\mathbb{X}}\colon E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ – естественная проекция.

Легко проверяется, что искомым отображением $\widehat{\varphi}$ будет $\psi \times \varphi'$. Оставшаяся часть теоремы (достаточность) в работе не используется, поэтому ее доказательство не приводим (применяем теорему 1.1).

Последовательно применяя к Equiv-ANE-пространству $\mathbb{X}$ теоремы 6.1, 4.8, получаем, что отображение $\varepsilon\colon E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \to \mathbb{Y}$ является изовариантно локально мягким и одновременно локально Equiv-мягким.

Пусть $\mathcal{F} \subset \mathrm{Conj}_G$. Далее под $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-A[N]E-*пространством* будем понимать G-$\mathcal{F}$-пространство $\mathbb{X}$, для которого каждое частичное G-отображение $\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{X}$, заданное на замкнутом подмножестве G-$\mathcal{F}$-пространства $\mathbb{Z}$, может быть продолжено на все $\mathbb{Z}$ [на некоторую G-окрестность $\mathbb{U} \subset \mathbb{Z}$ множества $\mathbb{A}$] до G-отображения, *изовариантного на дополнении* к $\mathbb{A}$ (отметим, что это определение несколько отличается от данного в § 2 определения). В силу теоремы 3.1 имеем $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \rightleftharpoons \{w \in \mathbb{W} \mid (G_w) \in \mathcal{F}\} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-AE для любого Isov-AE-пространства $\mathbb{W}$.

Теорема 6.3. *Если* $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-A[N]E, *а* $\mathbb{Y} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-A[N]E, *то* $E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-A[N]E.

Доказательство. Рассмотрим частичное G-отображение

$$\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\varphi} E(\mathbb{Y},\mathbb{X}), \qquad \mathrm{Orb}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}.$$

Если $\mathbb{Y} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-AE, то существует G-продолжение $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}$ отображения $\varepsilon \circ \varphi$, изовариантное на дополнении $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{A}$. Если $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-AE, то существует G-продолжение $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ композиции $\mathbb{A} \xrightarrow{\varepsilon} E(\mathbb{Y},\mathbb{X}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{X}$. Тогда образ диагонального G-отображения $\psi \times \chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Y} \times \mathbb{X}$ попадает в $E(\mathbb{Y},\mathbb{X})$ и, тем самым, $\psi \times \chi$ определяет G-продолжение отображения φ. Локальный вариант теоремы обосновывается аналогично.

Фиксируем G-пространство $\mathbb{W} \in$ Isov-AE, семейство $\mathcal{F} \subset \mathrm{Conj}_G$ и рассмотрим порожденный ими функтор Бореля

$$E_{\mathcal{F}}\colon \text{EQUIV-TOP} \to \text{ISOV}_{\mathcal{F}}\text{-TOP}, \qquad E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \rightleftharpoons \{(w,x) \mid G_w \subset G_x, (G_w) \in \mathcal{F}\},$$

который сопоставляет G-отображению $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ изовариантное отображение $E_f\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$, определенное формулой $E_f(w,x) = (w, f(x))$ (для одноэлементного семейства $\mathcal{F} = \{e\}$ подобную конструкцию предложил А. Борель). Поскольку $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-AE и $\mathrm{E}_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) = \mathrm{E}(\mathbb{W}_{\mathcal{F}},\mathbb{X})$, то в силу теоремы 6.3 имеем:

$(*)$ $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE, если $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE.

Покажем, что при некоторых условиях естественная проекция $p\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$, $p(w,x) = x$, является слабой G-гомотопической эквивалентностью.

Теорема 6.4. *Для любого G-пространства $\mathbb{X}$ отображение $p\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ является $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягким отображением.*

Доказательство. Рассмотрим допустимую (для проверки $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягкости отображения p) квадратную коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} = \mathrm{Cl}\,\mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \\ \cap & & \downarrow p \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{X} \end{array}$$

в категории $\mathrm{EQUIV}_{\mathcal{F}}$-TOP. Поскольку $\mathbb{W} \in$ Isov-AE, то частичное отображение $\mathbb{Z} \hookleftarrow \mathbb{A} \xrightarrow{\chi} \mathbb{W}$, где $\chi \rightleftharpoons \mathrm{pr}_{\mathbb{W}} \circ \varphi$, а $\mathrm{pr}_{\mathbb{W}} \colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{W}$ – естественная проекция, допускает G-продолжение $\widehat{\chi} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{W}$, изовариантное на дополнении. Поэтому имеем $G_{\widehat{\chi}(z)} = G_z \subset G_{\psi(z)}$ и $(G_{\widehat{\chi}(z)}) \in \mathcal{F}$ для всех $z \notin \mathbb{A}$. С учетом этого замечания легко проверить, что формулой $\widehat{\varphi}(z) = (\widehat{\chi}(z), \psi(z))$ корректно определяется искомое эквивариантное отображение $\widehat{\varphi} \colon \mathbb{Z} \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$.

Отсюда и из предложения 4.6 следует

Теорема 6.5. *Пусть $\mathbb{X}$ является G-пространством. Тогда G-отображение $p \colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ является:*

1) *слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью;*

2) *G-гомотопической эквивалентностью, если $\mathbb{X}$ является G-$\mathcal{F}$-пространством.*

Вложение $e \colon X_0 \hookrightarrow X$ называется *гомотопически плотным*, если существует такая гомотопия $H \colon X \times I \to X$, что $H_0 = \mathrm{Id}$, $\mathrm{Im}\, H_t \subset X_0$ для всех $t > 0$. Легко видеть, что:

(**) вложение e является гомотопически плотным, если любое частичное отображение $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} X$ может быть продолжено до такого отображения $\hat{f} \colon U \to X_0$, заданного на окрестности $U \supset A$, что $\hat{f}(U \setminus A) \subset X_0$.

Ясно также, что любое гомотопически плотное вложение является гомотопической эквивалентностью.

Если вложение e является гомотопически плотным, то с помощью критерия ANE-пространств через малые гомотопии (см. [22]) можно доказать, что $X_0 \in$ ANE в том и только в том случае, когда $X \in$ ANE. Следующий результат, представляющий собой бесконечномерный аналог так называемого условия "large gap" [19], особо выделяет экстензоры изовариантной категории.

Теорема 6.6. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathrm{Conj}_G$, а $(H) \in \mathcal{F}$. Если $\mathbb{X} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE, то вложение $e \colon \mathbb{X}_H \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ является гомотопически плотным.*

Доказательство. В силу свойства (**) следует, что доказательство гомотопической плотности вложения $\mathbb{X}_H \hookrightarrow \mathbb{X}^H$ сводится к продолжению любого частичного отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} \mathbb{X}^H$ до такого отображения $\hat{f} \colon U \to \mathbb{X}^H$, заданного на окрестности $U \supset A$, что $\hat{f}(U \setminus A) \subset \mathbb{X}_H$.

В силу $\mathbb{X} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE частичное G-отображение $Z \times G/H \hookleftarrow A \times G/H \xrightarrow{\Phi} \mathbb{X}$, $\Phi(a, g[H]) = gf(a)$, может быть G-продолжено до такого G-отображения $\widehat{\Phi} \colon U \times G/H \to \mathbb{X}$, заданного на G-окрестности $U \times G/H \supset A \times G/H$, что $\widehat{\Phi}$ является изовариантным на $(U \setminus A) \times G/H$. Из того, что G-стабилизатор любой точки из $U \times eH$ совпадает с H, следует, что ограничение $\widehat{\Phi}$ на $U \times eH$ есть искомое продолжение отображения f.

Аналогично теореме 6.6 доказывается следующее

Предложение 6.7. *Если $\mathbb{X}$ является $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-AE-пространством и $(H) \in \mathcal{F}$, то $\mathbb{X}_H$ является абсолютным экстензором и, следовательно, стягиваемым.*

§ 7. Функтор изовариантной гаммафикации

В этом параграфе речь пойдет о методе сведения изовариантных гомотопических задач к чисто топологическим. Для этого введем в рассмотрение *изовариантное пространство путей*

$$\mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}} \rightleftharpoons \{\lambda\colon [0,1] \to \mathbb{Y} \mid \operatorname{Im}\lambda \subset \mathbb{Y}_H,\ \text{где } H = G_{\lambda(0)}\} \subset \mathbb{Y}^I = C(I, \mathbb{Y}),$$

а также G-отображение $p\colon \mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}} \to \mathbb{Y}$, заданное формулой $p(\lambda) = \lambda(0)$. Поскольку стабилизатор $\lambda \in \mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}}$ равен $\bigcap\{G_{\lambda(t)} \mid t \in I\}$ и поэтому совпадает с $G_{\lambda(0)}$, то p является изовариантной сюръекцией.

Следующий результат является несложным следствием теоремы 2.1 о продолжении изовариантной гомотопии.

Предложение 7.1. *Если* $\mathbb{Y}$ *есть* $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE, *то* p *является* Isov-*мягким отображением* (*и, следовательно*, $\mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE).

Доказательство. Рассмотрим допустимую (для проверки $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-мягкости отображения p) квадратную коммутативную диаграмму $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} = \operatorname{Cl}\mathbb{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}} \\ \cap & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{Y} \end{array}$$

в категории ISOV-TOP. Изовариантное отображение φ естественным образом представляется в виде изовариантного отображения $\Phi\colon \mathbb{A} \times [0,1] \to \mathbb{Y}$, которое совместно с ψ определяет изовариантное отображение $\chi\colon \mathbb{Z}\times\{0\}\cup\mathbb{A}\times[0,1] \to \mathbb{Y}$. Из изовариантности ψ следует, что $\mathbb{Z}$ есть G-$\mathcal{F}$-пространство. Поскольку $\mathbb{Y} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE, то в силу теоремы 2.1 о продолжении изовариантной гомотопии существует изовариантное продолжение $\widehat{\chi}\colon \mathbb{Z}\times[0,1] \to \mathbb{Y}$ отображения χ. Построенное отображение $\widehat{\chi}$ естественным образом порождает изовариантное отображение $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}}$, которое продолжает φ и накрывает ψ. Предложение доказано.

Пусть $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ – изовариантное отображение $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$- ANE-пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$. Ясно, что послойное произведение $\Gamma_f\mathbb{X} \rightleftharpoons \mathbb{X}_f \times_p \mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}}$ совпадает с $\{(x,\lambda) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}} \mid \lambda(0) = f(x)\}$. Если действие группы отсутствует, то все приводимые построения сводятся к коцилиндру непрерывного отображения [24]. Из предложения 7.1 следует, что $\check{p}\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{X}$, параллельное p, является изовариантно мягким отображением, а следовательно, $\Gamma_f\mathbb{X} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE. Непосредственными рассуждениями устанавливается, что пространство $(\Gamma_f\mathbb{X})_H$ совпадает с $\Gamma_{f_H}(\mathbb{X}_H)$, а также что

$(*)$ отображения $(\Gamma_f)_H\colon (\Gamma_f\mathbb{X})_H \to \mathbb{Y}_H$ и $\Gamma_{f_H}\colon \Gamma_{f_H}(\mathbb{X}_H) \to \mathbb{Y}_H$ совпадают.

Введем в рассмотрение, кроме того, изовариантное отображение $\Gamma_f\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, заданное формулой $\Gamma_f(x,\lambda) = \lambda(1)$. Операцию Γ_f можно рассматривать как функтор подходящей категории – *функтор изовариантной гаммафикации*.

Изовариантное отображение $\Gamma_f\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является Isov-гомотопически эквивалентным исходному изовариантному отображению f. Это можно установить из существования изовариантного вложения $e\colon \mathbb{X} \hookrightarrow \Gamma_f\mathbb{X}, e(x) = (x, \delta_{f(x)})$, где $\delta_{f(x)}$ – постоянный путь, и Isov-гомотопически ему обратного изовариантного отображения $\theta\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{X}$, $\theta(x,\lambda) = x$. Отсюда и из свойства $(*)$ следует

Предложение 7.2. *Отображение f является* (*слабой*) Isov-*гомотопической эквивалентностью в том и только в том случае, когда* $\Gamma_f\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *является* (*слабой*) Isov-*гомотопической эквивалентностью.*

Как правило, изовариантное отображение $\Gamma_f\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ устроено в некотором смысле проще, чем изовариантное отображение f. Так, например, можно показать (хотя в статье это не используется), что отображение Γ_f является $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-расслоением Гуревича, если $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE.

Теорема 7.3. *Пусть* $\mathbb{X}$ *и* $\mathbb{Y}$ *являются* $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-A[N]E-*пространствами. Тогда отображение* $\Gamma_f\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *является* (*локально*) $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-*мягким.*

Доказательство. Пусть задана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} = \mathrm{Cl}\,\mathbb{A} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \Gamma_f\mathbb{X} \\ \cap & & \big\downarrow{\scriptstyle \Gamma_f} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\ \psi\ } & \mathbb{Y} \end{array}$$

в категории $\mathrm{ISOV}_{\mathcal{F}}$-TOP. Отображение $\varphi\colon \mathbb{A} \to \Gamma_f\mathbb{X}$ представляется в виде диагонального произведения (φ_1, φ_2) изовариантных отображений $\varphi_1\colon \mathbb{A} \to \mathbb{X}$ и $\varphi_2\colon \mathbb{A} \to \mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}}$. Отображение φ_2, в свою очередь, естественным образом представляется в виде изовариантного отображения $\Phi\colon \mathbb{A} \times [0,1] \to \mathbb{Y}$.

Если $\mathbb{X} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-AE, то существует изовариантное продолжение $\widehat{\varphi}_1\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ отображения φ_1. Отображения $f \circ \widehat{\varphi}_1$, Φ и ψ совместно определяют изовариантное отображение $\chi\colon \mathbb{Z} \times \{0\} \cup \mathbb{A} \times [0,1] \cup \mathbb{Z} \times \{1\} \to \mathbb{Y}$. Если $\mathbb{Y} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-AE, то существует изовариантное продолжение $\widehat{\chi}\colon \mathbb{Z} \times [0,1] \to \mathbb{Y}$ отображения χ. Построенное отображение $\widehat{\chi}$ естественным образом порождает изовариантное отображение $\widehat{\varphi}_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Y}^I_{\mathrm{Isov}}$. Несложно проверить, что искомым отображением $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \Gamma_f\mathbb{X}$ является отображение $(\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2)$.

Локальный вариант теоремы (когда $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in$ Isov-ANE) устанавливается аналогично.

Дальнейшее улучшение топологических свойств отображения Γ_f происходит при наложении на f тех или иных гомотопических условий. Например, в случае действия тривиальной группы имеет место важный факт (см. [23] и [2]).

Теорема 7.4. *Пусть* X, $Y \in$ ANE. *Если* (*не эквивариантное*) *отображение* $f\colon X \to Y$ *является гомотопической эквивалентностью, то отображение* $\Gamma_f\colon \Gamma_f X \to Y$ *является мягким.*

§ 8. Доказательство теоремы 1.1

Поскольку во введении теорема 1.1 была сведена к более простым утверждениям, то приступим к их доказательствам.

Редукция теоремы 1.11 к теореме 1.12. Рассмотрим изовариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ между $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространствами $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$, являющееся слабой $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-гомотопической эквивалентностью. В силу предложения 7.2 и теоремы 4.3 для доказательства Isov-гомотопической эквивалентности отображения f достаточно установить Isov-мягкость отображения $\Gamma_f\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$.

Поскольку отображение Γ_f является локально Isov-мягким (теорема 7.3), то в силу теоремы 1.12 справедлива

Лемма 8.1. *Если отображение* $(\Gamma_f)_H\colon (\Gamma_f\mathbb{X})_H \to \mathbb{Y}_H$ *является мягким для любой подгруппы* $H < G$, $(H) \in \mathcal{F}$, *то* Γ_f *является* Isov-*мягким отображением.*

Так как по условию отображение $f_H\colon \mathbb{X}_H \to \mathbb{Y}_H$ является гомотопической эквивалентностью ANE-пространств, в силу теоремы 7.4 отображение $\Gamma_{f_H}\colon \Gamma_{f_H}(\mathbb{X}_H) \to \mathbb{Y}_H$ является расслоением Гуревича и одновременно гомотопической эквивалентностью. Поэтому из теоремы 4.3 следует, что отображение Γ_{f_H} является мягким. Однако отображения $(\Gamma_f)_H$ и Γ_{f_H} совпадают (свойство $(*)$ из § 7), поэтому в силу леммы 8.1 отображение $\Gamma_f\colon \Gamma_f\mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ является Isov-мягким.

Редукция теоремы 1.8 к теореме 1.12. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \arrow[r, "E_f"] \arrow[d, "p_{\mathbb{X}}"'] & E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) \arrow[d, "p_{\mathbb{Y}}"] \\ \mathbb{X} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Y} \end{tikzcd}$$

в которой $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ суть G-$\mathcal{F}$-пространства. В силу теоремы 6.4 имеем, что $p_{\mathbb{X}}$ и $p_{\mathbb{Y}}$ суть $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягкие отображения.

Предложение 8.2. *Отображение f является* (*локально*) $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-*мягким в том и только в том случае, когда отображение E_f является* (*локально*) Isov-*мягким.*

Доказательство. Рассмотрим левый коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} = \mathrm{Cl}\,\mathbb{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathbb{X}}"] \arrow[d, "E_f"] & \mathbb{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] & E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) \arrow[r, "\mathrm{pr}_{\mathbb{Y}}"] & \mathbb{Y} \end{tikzcd}$$

в категории ISOV-TOP, который дополним правым коммутативным квадратом. Поскольку $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$ есть G-$\mathcal{F}$-пространство, а ψ изовариантно, то $\mathbb{Z}$ также является G-$\mathcal{F}$-пространством.

Если отображение f является $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-мягким, то G-отображение $\varphi_2 \rightleftharpoons \mathrm{pr}_{\mathbb{X}} \circ \varphi$ эквивариантно продолжается до отображения $\widehat{\varphi}_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$, являющегося поднятием отображения $\psi_2 \rightleftharpoons \mathrm{pr}_{\mathbb{Y}} \circ \psi$ относительно f. Ясно, что диагональное произведение $\psi_1 \times \widehat{\varphi}_2\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{W} \times \mathbb{Y}$ изовариантного отображения $\psi_1 \rightleftharpoons \mathrm{pr}_{\mathbb{W}} \circ \psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{W}$ и $\widehat{\varphi}_2$ есть изовариантное отображение, переводящее $\mathbb{Z}$ в $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$. Тем самым, возникает изовариантное отображение $\psi_1 \times \widehat{\varphi}_2\colon \mathbb{Z} \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$, которое продолжает φ и является поднятием ψ относительно E_f. Локальный вариант необходимости устанавливается аналогично.

Для установления достаточности рассмотрим коммутативный квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} = \mathrm{Cl}\,\mathbb{A} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \mathbb{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\psi"] & \mathbb{Y} \end{tikzcd}$$

в категории EQUIV$_{\mathcal{F}}$-TOP. Рассмотрим G-поднятие $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{A} \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$ отображения φ относительно Equiv$_{\mathcal{F}}$-мягкого отображения $p_{\mathbb{X}}\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$. Если отображение E_f является Isov-мягким, то в силу теоремы 4.8 оно является Equiv-мягким, поэтому $f \circ p_{\mathbb{X}} = p_{\mathbb{Y}} \circ E_f$ также является Equiv-мягким отображением как композиция двух Equiv-мягких отображений. Поскольку отображение $\widetilde{\varphi}$ – частичное G-поднятие отображения ψ относительно $f \circ p_{\mathbb{X}}$, отсюда следует, что существует G-поднятие $\chi\colon \mathbb{Z} \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$ отображения ψ относительно $f \circ p_{\mathbb{X}}$, являющееся продолжением $\widetilde{\varphi}$. Искомое G-продолжение φ, поднимающее ψ относительно f, есть $p_{\mathbb{X}} \circ \chi$.

Локальный вариант достаточности устанавливается аналогично.

Отметим, что $(E_f(\mathbb{X}))_H = \mathbb{W}_H \times \mathbb{X}^H$ и $(E_f(\mathbb{Y}))_H = \mathbb{W}_H \times \mathbb{Y}^H$, а $(E_f)_H$ естественно эквивалентно произведению $\mathrm{Id} \times f^H\colon \mathbb{W}_H \times \mathbb{X}^H \to \mathbb{W}_H \times \mathbb{Y}^H$. Поэтому $(E_f)_H$ мягко в том и только в том случае, когда f^H мягко. Отсюда и из предложения 8.2 следует, что теоремы 1.8, 1.12 равносильны, однако последняя устанавливается легче.

Доказательство теоремы 1.12. Если $|G| = 1$, то f – гомеоморфизм. Предположим, что для любой собственной подгруппы $H < G$ теорема установлена, и покажем, что она справедлива для любого изовариантного G-отображения $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. В силу следующей леммы достаточно рассмотреть G-пространство $\mathbb{X}$ без G-неподвижных точек.

Лемма 8.3. *Если теорема* 1.12 *справедлива для всех локально* Isov*-мягких и одновременно слабо* Isov*-мягких отображений $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ G-пространств, не имеющих G-неподвижных точек, то эта теорема справедлива для всех локально* Isov*-мягких и одновременно слабо* Isov*-мягких отображений f.*

Доказательство. Из справедливости теоремы 1.12 для отображения $f \restriction\colon \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}_G \to \mathbb{Y} \setminus \mathbb{Y}_G$ следует, что это отображение является Isov-мягким. Поскольку $f_G\colon \mathbb{X}_G \to \mathbb{Y}_G$ также является Isov-мягким, то согласно теореме 4.9 доказательство леммы будет завершено.

Разберем сначала случай, когда f имеет нетривиальную трубчатую структуру, т. е. заданы отображения срезов $\psi\colon \mathbb{Y} \to G/H$, $H \neq G$, и $\varphi = \psi \circ f\colon \mathbb{X} \to G/H$.

Лемма 8.4. *Если изовариантное G-отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ имеет нетривиальную трубчатую структуру, то теорема* 1.12 *справедлива для f.*

Доказательство. Рассмотрим изовариантное H-отображение $g \rightleftharpoons f \restriction\colon \mathbb{S} \rightleftharpoons \varphi^{-1}[H] \to \mathbb{T} \rightleftharpoons \psi^{-1}[H]$. В силу теоремы 5.1 H-изовариантное отображение g между H-пространствами является локально Isov$_H$-мягким. Кроме того, как несложно установить, $g_K\colon \mathbb{S}_K \to \mathbb{T}_K$ является мягким для любого $\mathbb{T}_K \neq \varnothing$, $K < H$, т. е. g является слабо Isov$_H$-мягким. Поскольку $H < G$ является собственной подгруппой, по индуктивному предположению g является Isov$_H$-мягким. Если это так, то в силу теоремы 5.2 отображение f является Isov-мягким.

Наконец, мы приступаем к доказательству оставшегося случая теоремы, когда $\mathbb{X}^G = \mathbb{Y}^G = \varnothing$. В силу теоремы о срезе [20] отсюда следует, что каждая орбита $G(y) \subset \mathbb{Y}$ имеет инвариантную окрестность с нетривиальной трубчатой структурой. Следовательно, справедлива

Лемма 8.5. *Существует такое открытое G-покрытие* $\{\mathbb{U}_\lambda\} \in \mathrm{cov}(\mathbb{Y})$, *что* f *является* Isov*-мягким отображением над каждым* $\mathbb{U}_\lambda$.

Завершает доказательство применение теоремы 4.10, 2).

§ 9. Доказательство теорем 1.3, 1.4, 1.6, 1.7

Доказательство теоремы 1.3. Поскольку любое G-$\mathcal{F}$-гомотопически мягкое отображение является слабой G-гомотопической эквивалентностью, лишь необходимая часть теоремы нуждается в пояснении. Рассмотрим G-гомотопически коммутативную диаграмму, участвующую в определении G-$\mathcal{F}$-гомотопической мягкости отображения $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$. В силу теоремы 6.4 имеем, что G-отображения $p_{\mathbb{X}}\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ и $p_{\mathbb{Y}}\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y}) \to \mathbb{Y}$ являются G-$\mathcal{F}$-мягкими. Поэтому $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$ и $E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$ являются $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространствами и существуют (так как $\mathrm{Orb}(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}$) такие G-отображения $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{A} \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$ и $\widetilde{\psi}\colon \mathbb{Z} \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$, что $\varphi = p_{\mathbb{X}} \circ \widetilde{\varphi}$ и $\psi = p_{\mathbb{Y}} \circ \widetilde{\psi}$.

Поскольку в силу теоремы 6.5 G-отображения $p_{\mathbb{X}}$ и $p_{\mathbb{Y}}$ являются слабыми G-$\mathcal{F}$-гомотопическими эквивалентностями, то отображение $E_f\colon E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X}) \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{Y})$ является слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространств, следовательно, по теореме 1.1 оно является G-гомотопической эквивалентностью. Поэтому E_f является G-гомотопически мягким отображением (свойство $(*)$ из § 2) и, следовательно, существует G-отображение $\chi\colon \mathbb{Z} \to E_{\mathcal{F}}(\mathbb{X})$, продолжающее $\widetilde{\varphi}$ и такое, что $E_f \circ \chi \simeq_G \widetilde{\psi}$. Несложно проверить, что искомым G-продолжением $\widehat{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$ отображения φ является $p_{\mathbb{X}} \circ \chi$.

Доказательство теоремы 1.4. В силу теоремы 1.3 существует G-отображение $h\colon \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ такое, что $g \circ h \simeq_G f$. Поскольку G-отображения f и g являются слабыми G-$\mathcal{F}$-гомотопическими эквивалентностями, отображение h является слабой G-$\mathcal{F}$-гомотопической эквивалентностью $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE-пространств и по теореме 1.1 оно является G-гомотопической эквивалентностью.

Доказательство теоремы 1.6. Достаточно рассмотреть какое-либо изовариантное отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{W}$ в Isov-AE-пространство $\mathbb{W}$. Поскольку $f(\mathbb{X}) \subset \mathbb{W}_{\mathcal{F}} \rightleftharpoons \{w \in \mathbb{W} \mid (G_w) \in \mathcal{F}\} \in \mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-AE и $\mathbb{W}^H_{\mathcal{F}}$ стягиваемо для любой подгруппы $H < G$, $(H) \in \mathcal{F}$ (теорема 6.6), отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ является слабой $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-гомотопической эквивалентностью.

Поскольку $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-ANE $\subset \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE, следовательно, $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE. Тем самым, применима теорема 1.1, в силу которой отображение $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ является G-гомотопической эквивалентностью, а $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE и $\mathbb{W}_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-ANE имеют один и тот же эквивариантный гомотопический тип. Далее воспользуемся предложением 2.2 и получим $\mathbb{X} \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{F}}$-AE.

Доказательство теоремы 1.7. Поскольку G-отображение $p\colon E_{\mathcal{C}}(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ является $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{C}}$-мягким в силу теоремы 6.4, из предложения 4.6 следует, что $p^H\colon (E_{\mathcal{C}}(\mathbb{X}))^H \to \mathbb{X}^H$ мягко для всех $(H) \in \mathcal{C}$. Так как по условию $\mathbb{X}^H \in$ AE, следовательно, $(E_{\mathcal{C}}(\mathbb{X}))^H \in$ AE для всех $(H) \in \mathcal{C}$. По теореме 1.6 имеем $E_{\mathcal{C}}(\mathbb{X}) \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{C}}$-AE.

Поскольку p является $\mathrm{Equiv}_{\mathcal{C}}$-мягким, а $E_{\mathcal{C}}(\mathbb{X}) \in \mathrm{Equiv}_{\mathcal{C}}$-AE, то существуют G-поднятие $\psi\colon \mathbb{A} \to E_{\mathcal{C}}(\mathbb{X})$ отображения φ и G-продолжение $\widehat{\psi}\colon \mathbb{Z} \to E_{\mathcal{C}}(\mathbb{X})$ отображения ψ. Искомым продолжением φ является $p \circ \widehat{\psi}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{X}$.

§ 10. Заключение

Одной из важных задач эквивариантной алгебраической топологии является определение (вычисление) гомотопического типа $\mathcal{F}$-классифицирующего G-пространства. Однако эта задача даже для достаточно простых групп G и нетривиальных семейств $\mathcal{F}$ вызывает большие трудности. Обнаруженный эффект концентрации $\mathcal{F}$-классифицирующих G-пространств, заключающийся в том, что каждый пучок $\mathbb{W}_{\mathcal{F}}$ $\mathcal{F}$-орбит Isov-AE-пространства $\mathbb{W}$ оказывается $\mathrm{Isov}_{\mathcal{F}}$-AE-пространством, дает дополнительную возможность производить эффективные вычисления (см. [12]).

Еще одной важной задачей является детектирование изовариантных экстензоров. В настоящей работе Isov-AE-пространство найдено как произведение подходящих G-пространств. Однако и многие другие конструкции топологии, геометрии и анализа приводят к таким пространствам. К их числу относятся пространство $C(G,\mathbb{R})$ регулярного представления группы, экспоненциальное пространство $\exp G$, пространство выпуклых тел евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, пространство линейных изоморфизмов гильбертова G-пространства и др.

Представляет значительный интерес доказательство теорем 1.8 и 1.12 для произвольных компактных групп G. Следует также развить теорию шейпов для категории ISOV-TOP, дать топологическую характеризацию эквивариантных шейповых эквивалентностей, эквивариантных тонких гомотопических эквивалентностей через соответствующие свойства отображений множеств неподвижных точек. Здесь следует упомянуть общую проблему описания эквивариантных понятий через топологические свойства множества неподвижных точек, сформулированную в [8, п. 8.1].

Пусть $f\colon X \to Y$ является локально мягким. Верно ли, что f мягко в том и только в том случае, когда $f\restriction\colon f^{-1}(U) \to U$ является гомотопической эквивалентностью для любого открытого множества $U \subset Y$?

В связи с гипотезой Гильберта–Смита следующий вопрос представляет определенный интерес: верно ли, что если действующая группа G нетривиальна, а $\mathbb{X} \in$ Isov-AE, то $\dim X = \infty$?

Список литературы

1. I. M. James, G. B. Segal, “On equivariant homotopy type”, *Topology*, **17**:3 (1978), 267–272.
2. I. M. James, G. B. Segal, “On equivariant homotopy theory”, *Topology Symposium* (Siegen, 1979), Lect. Notes in Math., **788**, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 316–330.
3. R. M. Seymour, “Some functional constructions on G-spaces”, *Bull. London Math. Soc.*, **15**:4 (1983), 353–359.
4. R. M. Seymour, “On G-cohomology theories and Künneth formulae”, *Current trends in algebraic topology, Part* 1 (London, ON, 1981), CMS Conf. Proc., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, 251–271.
5. У И Сян, *Когомологическая теория топологических групп преобразований*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: Wu Yi Hsiang, *Cohomology theory of topological transformation groups*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
6. J. P. May, *Equivariant homotopy and cohomology theory*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **91**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

7. T. tom Dieck, *Transformation groups*, de Gruyter Stud. Math., **8**, de Gruyter, Berlin–New York, 1987.
8. Т. том Дик, *Группы преобразований и теория представлений*, Мир, М., 1982; пер. с англ.: T. tom Dieck, *Transformation groups and representation theory*, Lecture Notes in Math., **766**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
9. G. E. Bredon, *Equivariant cohomology theories*, Lecture Notes in Math., **34**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1967.
10. S. Waner, "A generalization of the cohomology of groups", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **85**:3 (1982), 469–474.
11. S. Waner, "Mackey functors and G-cohomology", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **90**:4 (1984), 641–648.
12. С. М. Агеев, "Универсальные G-пространства Пале и изовариантные абсолютные экстензоры", *Матем. сб.*, **203**:6 (2012), 3–34.
13. M. Murayama, "On G-ANR's and their G-homotopy types", *Osaka J. Math.*, **20**:3 (1983), 479–512.
14. R. S. Palais, "The classification of G-spaces", Mem. Amer. Math. Soc., **36**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1960.
15. С. М. Агеев, Д. Реповш, "Задача о распространении накрывающей гомотопии для компактных групп преобразований", *Матем. заметки* (в печати).
16. С. М. Агеев, "Свободные эквивариантные экстензоры", *Общая топология. Пространства и отображения*, Изд-во МГУ, М., 1994, 2–8.
17. С. М. Агеев, "Классификация G-пространств", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:6 (1992), 1345–1357; англ. пер.: S. M. Ageev, "Classification of G-spaces", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **41**:3 (1993), 581–591.
18. С. М. Агеев, Д. Реповш, "О продолжении действий групп", *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 3–28; англ. пер.: S. M. Ageev, D. Repovš, "On extending actions of groups", *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 159–182.
19. S. Weinberger, *The topological classification of stratified spaces*, Chicago Lectures in Math., Chicago State Univ. Press, Chicago, IL, 1994.
20. Г. Е. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, **46**, Academic Press, New York–London, 1972.
21. К. Борсук, *Теория ретрактов*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: K. Borsuk, *Theory of retracts*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1967.
22. S.-T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.
23. T. tom Dieck, K. H. Kamps, D. Puppe, *Homotopietheorie*, Lecture Notes in Math., **157**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1970.
24. М. М. Постников, *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий*, Наука, М., 1984.

С. М. Агеев (S. M. Ageev)
Белорусский государственный университет, г. Минск
E-mail: ageev_sergei@yahoo.com

Поступило в редакцию
15.11.2010
14.11.2011