# ДИНАМИКА СПИНА В ЭКСПЕРИМЕНТАХ ПО ПОИСКУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ЧАСТИЦ, ПРОВОДИМЫХ В НАКОПИТЕЛЬНЫХ КОЛЬЦАХ

**А. Я. Силенко**

## 1. Введение

Весьма удобным способом описания взаимодействия релятивистских частиц с внешним полем и проведения квазиклассического перехода является преобразование Фолди – Ваутхойзена (ФВ) [1]. В представлении ФВ гамильтониан и все операторы имеют блок-диагональный вид (диагональны по двум спинорам). Соотношения между операторами полностью аналогичны соотношениям между соответствующими классическими величинами. Операторы в представлении ФВ имеют такой же вид, как в нерелятивистской квантовой теории. Только представление ФВ обладает совокупностью этих свойств, значительно упрощающих переход к квазиклассическому описанию. Именно представление ФВ обеспечивает наилучшую возможность получения классического предела релятивистской квантовой механики [1, 2, 3].

Мы используем термин «$g-2$-прецессия» для любого вращения спина в горизонтальной плоскости накопительного кольца, поскольку оно определяется аномальной частью магнитного момента частиц и пропорционально $g-2$. Термин «спин» означает среднее значение квантово-механического оператора спина.

Для описания динамики спина в накопительных кольцах в настоящей работе используется цилиндрическая система координат. Существует много алгоритмов компьютерных вычислений, базирующихся на других системах координат (например, на координатах Френе – Серре [4]). Эти алгоритмы позволяют решить любую проблему динамики пучка и спина в накопительных кольцах. Однако для ряда прецизионных экспериментов аналитическое решение проблемы может быть необходимым. Мы имеем в виду $g-2$ [5, 6] и ЭДМ-эксперименты [7, 8], чувствительность которых исключительно высока. Использование цилиндрических координат для аналитических вычислений динамики спина может быть очень успешным, если конфигурация основных полей достаточно проста. Когда накопительное кольцо или имеет форму круга, или разделено на круговые секторы пустыми промежутками, использование цилиндрических координат для описания движения спина является совершенно естественным.

Прецизионный поиск электрических дипольных моментов (ЭДМ) фундаментальных частиц, ядер и атомов является прекрасным способом поиска новой физики вне Стандартной Модели [9]. Чтобы разделить прецессию спина, обусловленную ЭДМ и другими эффектами, необходимо адекватное математическое описание движения спина. В настоящей работе для этой цели предлагается использовать цилиндрическую систему координат, которая позволяет произвести точное аналитическое описание движения спина в накопительных кольцах. Такое описание производится в общем виде. Мы анализируем также проблему усреднения угловой скорости вращения спина.

Коллаборация по поиску ЭДМ частиц в накопительных кольцах исследует возможность поиска ЭДМ путем помещения частиц в накопительное кольцо и наблюдения за прецессией их спина [7, 8]. Метод замораживания спина [7, 8, 10], который заключается в устранении прецессии спина в горизонтальной плоскости с помощью радиального электрического поля, может обеспечить чувствительность измерений ЭДМ дейтрона порядка $10^{-27}$ $e \cdot$см [8].

Резонансный метод, предложенный Ю. Орловым [11], позволяет достигнуть чувствительности порядка $10^{-29}$ $e \cdot$см для дейтрона и $10^{-28}$ $e \cdot$см для протона. Этот метод основан на идее, что прецессия, обусловленная ЭДМ дейтрона, будет накапливаться, если вызваны когерентные продольные колебания пучка, находящиеся в фазе с прецессией спина в горизонтальной плоскости. Данные колебания стимулируются осциллирующим продольным электрическим полем, и их частота должна быть очень близка к частоте прецессии спина. Резонансный эффект в накопительном кольце обеспечивается радиочастотными резонаторами [11, 12, 13].

Резонансный метод свободен от основной систематической ошибки измерения ЭДМ при помощи метода замораживания спина, заключающейся в наличии слабого вертикального магнитного поля [7, 8]. Это поле приводит к росту вертикальной поляризации (РВП), имитирующему наличие ЭДМ [7, 8].

В настоящей работе рассчитываются вклады электрического и магнитного полей в РВП в эксперименте по поиску ЭДМ частиц, проводимом резонансным методом (резонансном ЭДМ-эксперименте) [11, 12, 13]. Мы выводим формулы для резонансных напряженностей. Мы также анализируем отличительные черты резонансного ЭДМ-эксперимента для дейтронов и протонов и определяем динамику компонент вектора поляризации.

В работе используется система единиц $\hbar = c = 1$. Скорость света $c$ будет явно включена в некоторые уравнения.

## 2. Вывод оператора Гамильтона и квантово-механического уравнения движения спина в представлении Фолди – Ваутхойзена для частиц с электрическим дипольным моментом

В настоящей работе используется наиболее строгий метод нахождения уравнения движения спина, основанный на выводе оператора Гамильтона в представлении ФВ, квантово-механического уравнения движения спина и последующем проведении квазиклассического перехода. Весьма важно, что в представлении ФВ очень простой вид имеют операторы координат $\mathbf{r}$, импульса $\mathbf{p} = -i\nabla$ и поляризации

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – матрица Паули. В других представлениях эти операторы выражаются значительно более громоздкими формулами [1, 3]. Это делает представление ФВ исключительно удобным для нахождения уравнений движения частиц и спина. В частности, операторное уравнение движения спина определяется формулой

$$\frac{d\mathbf{\Pi}}{dt} = i[H, \mathbf{\Pi}]. \qquad (1)$$

Для нахождения квазиклассического уравнения движения спина необходимо произвести усреднение по волновым функциям [3].

В работе [3] был найден оператор Гамильтона в представлении Фолди – Ваутхойзена для релятивистских частиц со спином 1/2, взаимодействующих с электромагнитным полем. Вычисления проведены с точностью до производных от электрической и магнитной напряженностей внешнего поля (в общем случае нестационарного) и с учетом наличия у частиц аномального магнитного момента (АММ).

Мы проведем преобразование ФВ для релятивистских частиц с АММ и ЭДМ, взаимодействующих с электромагнитным полем. Метод преобразования детально описан в работе [3].

Учет ЭДМ может быть произведен путем включения в гамильтониан Дирака – Паули, описывающий взаимодействие частиц с АММ с электромагнитным полем, слагаемых, характеризующих ЭДМ. Уравнение Дирака – Паули имеет вид

$$[\gamma^{\mu}\pi_{\mu} - m + \frac{\mu'}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}]\Psi = 0, \qquad \pi_{\mu} = p_{\mu} - eA_{\mu}, \qquad (2)$$

где $\gamma^{\mu}$ – матрицы Дирака, $F_{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля, $p^{\mu}$ и $A^{\mu} = (\Phi, \mathbf{A})$ – четырехмерные импульс частицы и потенциал внешнего поля, $\sigma^{\mu\nu} = i(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu})/2$, $m$ – масса покоя, $\mu'$ – АММ частицы.

Соответствующий гамильтониан в представлении ФВ, не учитывающий ЭДМ, определяется выражением [3]

$$\begin{aligned} H = \beta\varepsilon' + e\Phi + \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\mu_0 m}{\varepsilon' + m} + \mu'\right)\frac{1}{\varepsilon'}, (\mathbf{\Sigma}[\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{E}] - \mathbf{\Sigma}[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\pi}] - \nabla\cdot\mathbf{E})\right\}_{+} + \\ + \frac{\mu_0 m}{16}\left\{\frac{2\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' m + m^2}{\varepsilon'^4(\varepsilon' + m)^2}, \boldsymbol{\pi}\cdot\nabla(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\pi})\right\}_{+} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\mu_0 m}{\varepsilon'} + \mu'\right), \mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{H}\right\}_{+} + \\ + \frac{\mu'}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon'(\varepsilon' + m)}, [(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\pi})(\mathbf{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi}) + (\mathbf{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{H}) + 2\pi(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\pi})]\right\}_{+}, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\mu_0 = e/(2m)$ – дираковский магнитный момент, $\boldsymbol{\pi} = -i\nabla - e\mathbf{A}$ и

$$\varepsilon' = \sqrt{m^2 + \boldsymbol{\pi}^2}. \qquad (4)$$

АММ и ЭДМ тесно связаны между собой, поскольку они определяют действительную и мнимую части одной и той же физической величины [14, 15]. Вклады АММ и ЭДМ в лагранжиан равны [14]

$$L_{AMM} = \frac{\mu'}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \qquad L_{EDM} = -i\frac{d}{2}\sigma^{\mu\nu}\gamma^5 F_{\mu\nu}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $d$ — ЭДМ частицы, а $0, -1$ – соответствующие матрицы $2\times 2$.

Учет ЭДМ частицы заключается во включении слагаемого, пропорционального $d$, в уравнение Дирака – Паули. В результате это уравнение приобретает вид

$$[\gamma^{\mu}\pi_{\mu} - m + \frac{\mu'}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - i\frac{d}{2}\sigma^{\mu\nu}\gamma^{5}F_{\mu\nu}]\Psi = 0. \qquad (6)$$

Оператор Гамильтона в представлении Дирака определяется выражением

$$H_D = \beta m + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + e\Phi + \mu'(-\boldsymbol{\Pi}\cdot\mathbf{H} + i\gamma\cdot\mathbf{E}) - id(-\boldsymbol{\Pi}\cdot\mathbf{H} + i\gamma\cdot\mathbf{E})\gamma^{5}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей. Здесь и в дальнейшем используются следующие стандартные обозначения:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \gamma^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \beta\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Pi} = \beta\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$$

Оператор Гамильтона (7) приводится к виду

$$H_D = \beta m + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi} + e\Phi + \mu'(-\boldsymbol{\Pi}\cdot\mathbf{H} + i\gamma\cdot\mathbf{E}) - d(\boldsymbol{\Pi}\cdot\mathbf{E} + i\gamma\cdot\mathbf{H}). \qquad (8)$$

Формула (8) показывает, что слагаемые, описывающие вклады АММ и ЭДМ в гамильтониан, переходят друг в друга при замене

$$\mathbf{H} \to \mathbf{E}, \mathbf{E} \to -\mathbf{H}, \mu' \to d. \qquad (9)$$

Такая же связь между этими слагаемыми имеет место и при классическом описании.

Мы можем апостериори отметить, что для корректного включения ЭДМ в уравнение Дирака – Паули необязательно применять форму записи (5), (6). Более естественная форма записи используется в классической электродинамике [16]. В этом случае взаимодействие ЭДМ с электромагнитным полем описывается с помощью тензора $G^{\mu\nu} = (-\mathbf{H}, -\mathbf{E})$, дуального тензору электромагнитного поля $F^{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$. При использовании тензора $G^{\mu\nu}$ для описания ЭДМ обобщенное уравнение Дирака – Паули имеет вид

$$[\gamma^{\mu}\pi_{\mu} - m + \frac{\mu'}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{d}{2}\sigma^{\mu\nu}G_{\mu\nu}]\Psi = 0, \qquad (10)$$

а лагранжиан $L_{EDM}$ приводится к виду

$$L_{EDM} = -\frac{d}{2}\sigma^{\mu\nu}G_{\mu\nu}. \qquad (11)$$

Оператор Гамильтона для частиц с АММ и ЭДМ, рассчитанный с помощью метода, предложенного в работе [3], имеет вид

$$
\begin{aligned}
H = \beta\varepsilon' + e\Phi + \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\mu_0 m}{\varepsilon' + m} + \mu'\right)\frac{1}{\varepsilon'}, (\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{E}] - \boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\pi}] - \nabla\cdot\mathbf{E})\right\}_+ + \\
+\frac{\mu_0 m}{16}\left\{\frac{2\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' m + m^2}{\varepsilon'^4(\varepsilon' + m)^2}, \boldsymbol{\pi}\cdot\nabla(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\pi})\right\}_+ - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\mu_0 m}{\varepsilon'} + \mu'\right), \boldsymbol{\Pi}\cdot\mathbf{H}\right\}_+ + \\
+\frac{\mu'}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon'(\varepsilon' + m)}, [(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi}) + (\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{H}) + 2\pi(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\boldsymbol{\pi})]\right\}_+ - d\boldsymbol{\Pi}\cdot\mathbf{E} + \\
+\frac{d}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon'(\varepsilon' + m)}, [(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi}) + (\boldsymbol{\Pi}\cdot\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E})]\right\}_+ - \frac{d}{4}\left\{\frac{1}{\varepsilon'}, (\boldsymbol{\Sigma}[\boldsymbol{\pi}\times\mathbf{H}] - \boldsymbol{\Sigma}[\mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi}])\right\}_+ .
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Сравнение выражений (3) и (12) показывает, что замена (9) в гамильтониане (3) является допустимой. Несмотря на схожесть описания АММ и ЭДМ, взаимодействие двух моментов с электромагнитным полем имеет принципиальное отличие. В выражении для оператора Гамильтона в представлении ФВ отсутствуют слагаемые, пропорциональные ЭДМ и содержащие первые производные от напряженностей поля. Соответствующие слагаемые, пропорциональные АММ, характеризуют контактное взаимодействие с внешними зарядами и токами. Этот результат, обусловленный отсутствием магнитных зарядов и токов, весьма важен, поскольку упрощает оценку вклада ЭДМ в релятивистское выражение (12) для гамильтониана.

Весьма важным является вопрос о движении спина частиц в электромагнитном поле. Квантово-механическое (операторное) уравнение движения спина релятивистских частиц с АММ и ЭДМ, получаемое с помощью уравнений (1), (12), имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{\Pi}}{dt} = \left\{\left(\frac{\mu_0 m}{\varepsilon' + m} + \mu'\right)\frac{1}{\varepsilon'}, [\boldsymbol{\Pi}\times[\mathbf{E}\times\boldsymbol{\pi}]]\right\}_+ + \left\{\left(\frac{\mu_0 m}{\varepsilon'} + \mu'\right), [\boldsymbol{\Sigma}\times\mathbf{H}]\right\}_+ + \\
-\frac{\mu'}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon'(\varepsilon' + m)}, ([\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{\pi}](\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{H}) + (\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\pi})[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{\pi}])\right\}_+ + 2d[\boldsymbol{\Sigma}\times\mathbf{E}] + \\
-\frac{d}{2}\left\{\frac{1}{\varepsilon'(\varepsilon' + m)}, ([\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{\pi}](\boldsymbol{\pi}\cdot\mathbf{E}) + (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\pi})[\boldsymbol{\Sigma}\times\boldsymbol{\pi}])\right\}_+ - d\left\{\frac{1}{\varepsilon'}, [\boldsymbol{\Pi}\times[\mathbf{H}\times\boldsymbol{\pi}]]\right\}_+ .
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Таким образом, проведение преобразования ФВ позволяет найти оператор Гамильтона и квантово-механическое уравнение движения спина релятивистских частиц с АММ и ЭДМ.

## 3. Общие уравнения движения частицы и спина

Траектория движения частиц в накопительных кольцах, имеющих форму круга, приблизительно является окружностью. Когерентные бетатронные колебания (КБК) пучка как целого в горизонтальной и вертикальной плоскостях изменяют траектории отдельных частиц. При использовании радиочастотных резонаторов происходят также когерентные вынужденные колебания. Некогерентное движение частиц также может иметь место. В результате траектории частиц не замкнуты, а дефекты полей обусловливают их дисторсии. По этим причинам движение спина становится весьма сложным.

Как правило, для описания движения частиц и их спина достаточно использовать одночастичное приближение. В этом приближении когерентные и некогерентные бетатронные колебания приводят к аналогичным эффектам.

Движение частиц определяется уравнением Лоренца:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\left(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}\right), \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m}. \tag{14}$$

Удобно использовать единичный вектор направления импульса $\mathbf{N} = \mathbf{p}/p$. Поскольку

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{p} - \frac{\mathbf{p}}{p^3}\left(\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{p}}\right),$$

уравнение (14) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{N}, \quad \boldsymbol{\omega} = -\frac{e}{\gamma m}\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{N}\times\mathbf{E}}{\beta}\right), \tag{15}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения частиц.

Движение спина без учета ЭДМ описывается уравнением Томаса – Баргманна – Мишеля –Телегди (Т-БМТ):

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}_{T-BMT}\times\mathbf{S},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{T-BMT} = -\frac{e}{2m}\left\{\left(g-2+\frac{2}{\gamma}\right)\mathbf{B} - \frac{(g-2)\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B}) - \left(g-2+\frac{2}{\gamma+1}\right)(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})\right\}, \tag{16}$$

где $\mathbf{S}$ – вектор спина. Это уравнение было выведено Томасом [17] (также Френкелем [18]) и в более общей форме – Баргманном, Мишелем и Телегди [19].

Сравнение уравнений (15) и (16) показывает, что спин частицы, помещенной в магнитное поле, вращается в горизонтальной плоскости по отношению к ее импульсу с частотой, пропорциональной $g-2$.

Переход от квантово-механического уравнения движения спина к квазиклассическому приближению описан в работе [3]. Вводя фактор $\eta = 4dm/e$, из уравнения (13) находим квазиклассическое уравнение движения спина:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega}_{BMT} + \boldsymbol{\Omega}_{EDM})\times\mathbf{S},$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{BMT} = -\frac{e}{2m}\left\{\left(g-2+\frac{2}{\gamma}\right)\mathbf{H} - \frac{(g-2)\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{H}) - \left(g-2+\frac{2}{\gamma+1}\right)[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}]\right\}, \tag{17}$$
$$\boldsymbol{\Omega}_{EDM} = -\frac{e\eta}{2m}\left(\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{H}\right),$$

где $\mathbf{\Omega}_{BMT}$ определяется уравнением Т-БМТ [19]. Уравнение (17) совпадает с соответствующим классическим уравнением [10]. В общем случае указанный фактор равен $\eta = \frac{2dm}{eS}$, где $S$ – спиновое квантовое число.

Электрический дипольный момент оказывает пренебрежимо малое влияние на движение частиц, но влияет на движение спина. Характер движения спина, обусловленного взаимодействием электрического и магнитного дипольных моментов с внешним полем, существенно различается. Это обстоятельство позволяет проводить эксперименты по измерению ЭДМ в накопительных кольцах методом «замораживания» спина [7]. Поворот спина относительно вектора импульса в горизонтальной плоскости можно устранить с помощью радиального электрического поля с напряженностью

$$\mathbf{E} = \frac{a\gamma^2}{1 - a\beta^2\gamma^2}[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}], \quad a = \frac{g-2}{2}.$$

В этом случае вклад ЭДМ в движение спина характеризуется угловой скоростью:

$$\mathbf{\Omega}_{EDM} = -\frac{e\eta}{2m} \cdot \frac{1+a}{1 - a\beta^2\gamma^2}[\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{H}]. \tag{18}$$

Различие в знаках с работой [7] объясняется тем, что в этой работе вектор угловой скорости был определен с противоположным знаком.

## 4. Поправки к угловой скорости движения частицы в горизонтальной плоскости

Движение спина частиц в накопительных кольцах обычно определяется по отношению к траектории частиц. Использование цилиндрических координат существенно упрощает анализ $g-2$-прецессии и эффектов, обусловленных наличием у частицы ЭДМ. Когда конфигурация основных полей достаточно проста, уравнения движения частицы и спина в цилиндрических координатах приобретают достаточно простой вид. Следует учитывать, что оси цилиндрической системы координат определяются положением частицы, которая не только движется поступательно, но и в общем случае участвует в колебаниях по трем осям. Трансформация уравнения Т-БМТ к цилиндрической системе координат должна производиться с учетом поправок на колебания в уравнении движения частицы.

Вертикальные когерентные бетатронные колебания пучка и дисторсии орбиты изменяют плоскость движения частицы. (Псевдо) вектор угловой скорости и мгновенная плоскость движения частицы (мгновенная плоскость вращения вектора $\mathbf{N}$) не совпадают с горизонтальной плоскостью. Угол $\Phi$ между двумя положениями вращающегося вектора $\mathbf{N}$ в повернутой на некоторый угол мгновенной плоскости движения частицы не равен углу $\phi$ между двумя соответствующими горизонтальными проекциями. Следовательно, вертикальные КБК и дисторсии орбиты изменяют мгновенную угловую скорость движения частицы. Этот эффект может быть рассчитан.

Мы полагаем, что оси $x$ и $y$ горизонтальны, а ось $z$ – вертикальна. В цилиндрической системе координат удобно направить ось $z$ ортогонально плоскости невозмущенного движения частицы. Мы можем определить угол вращения частицы в плоскости $xy$ как угол между двумя горизонтальными проекциями единичного вектора направления импульса, $\mathbf{N}_{\|}$ и $\mathbf{N}'_{\|}$. Бесконечно малый угол вращения частицы в плоскости $xy$, $d\phi$ равен

$$d\phi = \frac{(\mathbf{N}_{\|} \times \mathbf{N}'_{\|}) \cdot \mathbf{e_z}}{|\mathbf{N}_{\|}| \cdot |\mathbf{N}'_{\|}|} = \frac{(\mathbf{N}_{\|} \times d\mathbf{N}_{\|}) \cdot e_z}{|\mathbf{N}_{\|}|^2},$$

где $d\mathbf{N}_{\|} = \mathbf{N}'_{\|} - \mathbf{N}_{\|}$ и $d\mathbf{N}_{\|}$ характеризует бесконечно малый угол поворота вектора $\mathbf{N}_{\|}$. Символ $\|$ означает горизонтальную проекцию любого вектора. Величина $d\mathbf{N}_{\|}$ определяет отклонение импульса частицы за время $dt$. Мгновенная угловая скорость вращения частицы в горизонтальной плоскости определяется выражением

$$\dot{\phi} \equiv \frac{d\phi}{dt} = \frac{(\mathbf{N}_{\|} \times \dot{\mathbf{N}}_{\|}) \cdot \mathbf{e_z}}{|\mathbf{N}_{\|}|^2} = \omega_z - o, \tag{19}$$

где

$$o = \frac{(\omega_x N_x + \omega_y N_y) N_z}{1 - N_z^2} = \frac{(\omega_\rho N_\rho + \omega_\phi N_\phi) N_z}{1 - N_z^2}. \tag{20}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\omega}$ определяются уравнением (15). Индексы $\rho$ и $\phi$ означают проекции на базисные векторы $\mathbf{e}_\rho$ и $\mathbf{e}_\varphi$ цилиндрической системы координат.

Уравнения (19) и (20) являются точными. Справедливость этих уравнений может быть подтверждена тем, что они точно описывают поворот плоскости орбиты на постоянный угол. Затем можно оценить величину $o$ в экспериментальных условиях, когда угол поворота плоскости орбиты частиц осциллирует.

Если орбита частиц идеально горизонтальна, направление импульса определяется формулами:

$$N_x = -\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad N_y = \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad N_z = 0,$$

где $\omega_0$ – циклотронная частота и $\varphi_0$ – произвольная фаза. Если нормаль к отклоненной орбите частиц ортогональна оси $y$ и отклонена от оси $z$ на постоянный угол $\theta$, $y$-компоненты всех векторов не меняются, и компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{N}$ равны:

$$\begin{gathered} \omega_x = \omega_0 \sin\theta, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega_0 \cos\theta, \\ N_x = -\cos\theta \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad N_y = \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad N_z = \sin\theta \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \end{gathered} \tag{21}$$

В этом случае уравнение (1) принимает вид

$$\dot{\phi} = \frac{\omega_0 \cos\theta}{1 - \sin^2\theta \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}. \tag{22}$$

После интегрирования и усреднения по времени мы находим: $<\dot{\phi}> = \omega_0$. Этот результат согласуется с очевидным фактом, что усредненные частоты движения частицы в отклоненной и горизонтальной плоскостях равны, и, следовательно, подтверждает справедливость уравнений (19),(20).

Для оценки величины $o$ в реальных условиях эксперимента можно ограничиться учетом только возмущений траектории частицы, обусловленных радиальными и вертикальными КБК. Синхротронное движение не влияет на эту величину. Оценки показывают, что радиальное и вертикальное бетатронное движение можно описать простыми формулами:

$$N_\rho = \frac{p_\rho}{p} = \rho_0 \sin(\omega_r t + \alpha),$$

$$N_z = \frac{p_z}{p} = \psi_0 \sin(\omega_v t + \delta),$$

где $\rho_0$ и $\psi_0$ – угловые амплитуды, $\omega_r$ и $\omega_v$ – угловые частоты радиальных и вертикальных КБК соответственно.

С учетом порядков величин

$$\omega_\rho \sim \psi_0 \omega_v,\ \omega_\phi \sim \rho_0 \psi_0 \omega_v,\ N_\rho \sim \rho_0,\ N_\phi \approx \pm 1,\ N_z \sim \psi_0 \tag{23}$$

мы получаем, что величина $o$ – третьего порядка по угловым амплитудам $\rho_0$ и $\psi_0$. Более того, она осциллирует и, следовательно, в результате усреднения обращается в ноль. Если мы учитываем только слагаемые второго порядка по угловым амплитудам и средняя орбита частиц не отклонена, величина $o$ пренебрежимо мала. Приближенно

$$\dot{\phi} = \omega_z = -\frac{e}{\gamma m}\left(B_z - \frac{(\mathbf{N} \times \mathbf{E})_z}{\beta}\right). \tag{24}$$

## 5. Уравнение движения спина в цилиндрических координатах

Чтобы трансформировать общее уравнение движения спина (17) к цилиндрическим координатам, необходимо найти величины

$$\frac{dS_\rho}{dt},\ \frac{dS_\phi}{dt},\ \text{и}\ \frac{dS_z}{dt}.$$

Из геометрии проблемы следует, что горизонтальные оси $\mathbf{e}_\rho$ и $\mathbf{e}_\varphi$ вращаются с мгновенной угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}' = \dot{\phi}\mathbf{e}_\mathbf{z}.$$

Легко показать с помощью простого преобразования, что движение спина по отношению к осям цилиндрической системы координат может быть записано в виде:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt}=\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}}\times\mathbf{S},\quad \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}}=\boldsymbol{\Omega}-\dot{\phi}\mathbf{e}_{\mathbf{z}}. \tag{25}$$

В этом уравнении $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}}$ – угловая скорость вращения спина в цилиндрических координатах. Соответствующая угловая скорость в декартовых координатах, равная $\boldsymbol{\Omega}$, определяется уравнением (17). Различие между величинами $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ обусловлено вращением осей $\mathbf{e}_{\rho}$ и $\mathbf{e}_{\varphi}$.

ЭДМ влияет на движение частицы, только если электрическое поле неоднородно. Однако поправка к уравнению движения частицы и в этом случае пренебрежимо мала. Если радиочастотные резонаторы не используются, можно также пренебречь слагаемым $\frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})$.

В уравнении (25)

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}}=-\frac{e}{m}\left\{a\mathbf{B}-\frac{a\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B})+\left(\frac{1}{\gamma^2-1}-a\right)(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})\right. +$$

$$\left.+\frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{B}_{\parallel}-\frac{1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})_{\parallel}\right]+\frac{\eta}{2}\left(\mathbf{E}-\frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E})+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}\right)\right\}+o\mathbf{e}_{\mathbf{z}}. \tag{26}$$

Эта формула является точной, и $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}}$ – это угловая частота прецессии спина. Уравнения (25), (26) описывают движение спина в произвольных накопительных кольцах с учетом ЭДМ частиц. Слагаемое $o\mathbf{e}_{\mathbf{z}}$ в формуле (26) для ЭДМ- и $g-2$-экспериментов пренебрежимо мало. При измерениях ЭДМ в рамках $g-2$-эксперимента выполнялось условие $1/(\gamma^2-1)=a$, т. е. $\gamma=29.3$. В этом случае третье слагаемое в уравнении (26) равно нулю [5, 6].

После пренебрежения малыми слагаемыми уравнение для угловой скорости $g-2$-прецессии, учитывающее наличие ЭДМ, приобретает вид

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}}=-\frac{e}{m}\{a\mathbf{B}-\frac{a\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{B})+\left(\frac{1}{\gamma^2-1}-a\right)(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})+\\ +\frac{1}{\gamma}\left[\mathbf{B}_{\parallel}-\frac{1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E})_{\parallel}\right]+\frac{\eta}{2}(\mathbf{E}+\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B})\}.\end{gathered} \tag{27}$$

Формулы (26), (27) могут быть использованы для аналитических вычислений динамики спина в цилиндрических координатах с учетом дисторсий полей и осцилляций пучка.

## 6. Усреднение угловой скорости вращения спина

Динамика спина, определяемая формулой (26), достаточно проста, когда вертикальная проекция вектора спина увеличивается виток за витком. Такое поведение спина имеет место в планируемом ЭДМ-эксперименте. Однако в $g-2$-эксперименте необходимо определять усредненные и интегральные характеристики движения спина в горизонтальной плоскости [5, 6]. Мгновенная угловая скорость вращения спина в горизонтальной плоскости $\dot{\psi}$ характеризуется изменением угла $\psi$ , определяющего ориентацию спина в этой плоскости. Величина $\dot\psi$ может быть найдена аналогично соответствующей величине $\dot\phi$, определяющей вращение частицы и определяемой формулами (19), (20). Она описывается уравнением

$$\dot\psi \equiv \frac{d\psi}{dt} = \frac{(\mathbf{P}_\| \times \dot{\mathbf{P}}_\|)\cdot \mathbf{e_z}}{|\mathbf{P}_\||^2} = (\omega_a)_z - O, \qquad (28)$$

где

$$O = \frac{\left[(\omega_a)_x \xi_x + (\omega_a)_y \xi_y\right]\xi_z}{1-\xi_z^2} = \frac{\left[(\omega_a)_\rho \xi_\rho + (\omega_a)_\phi \xi_\phi\right]\xi_z}{1-\xi_z^2} \qquad (29)$$

и $\mathbf{P} = \mathbf{S}/S$ – вектор поляризации.

## 7. Поля, обусловливающие рост вертикальной поляризации

В резонансном ЭДМ-эксперименте [11, 12, 13] планируется стимулировать РВП, обусловленный ЭДМ, и избегать аналогичного эффекта, вызванного магнитным моментом. Известно, что магнитный резонанс имеет место, когда частица, помещенная в однородное вертикальное магнитное поле, также подвергается воздействию горизонтального магнитного поля, осциллирующего с частотой, близкой к частоте прецессии спина (см., например, [20]). При движении частицы магнитный резонанс может быть также вызван осциллирующим электрическим полем, трансформирующимся в осциллирующее магнитное поле в системе покоя частицы. Результатом наличия магнитного резонанса является переворот спина для вертикально поляризованного и РВП – для горизонтально поляризованного пучка.

Очевидно, магнитный резонанс не может иметь места, когда электрическое поле продольно, поскольку только продольное электрическое поле появляется в системе покоя частицы. Поскольку частоты бетатронных колебаний выбираются далекими от резонанса, эти колебания не могут приводить к резонансному эффекту. Однако резонанс имеет место, когда частица обладает ЭДМ. Вектор ЭДМ определяется выражением $\mathbf{d} = d\mathbf{S}/S$ . Резонанс является «электрическим», поскольку он обусловлен электрическим полем в системе покоя частицы. В этой системе электрическое поле имеет продольную компоненту $E'_\phi$, определяемую осциллирующим электрическим полем, и радиальную компоненту $E'_\rho$, обусловленную преобразованием Лоренца вертикального магнитного поля. Последняя компонента имеет резонансную часть вследствие модуляции скорости частицы. Только эта компонента учитывалась в предыдущих расчетах [11, 12, 13]. Резонансный эффект обеспечивается обеими компонентами электрического поля в системе покоя частицы.

Мы используем систему покоя частицы для объяснения причины возникновения резонанса. Однако мы не используем ее для расчетов и выводим все базовые уравнения в цилиндрической системе координат. Движение спина частиц в накопительных кольцах обычно определяется по отношению к траектории частицы. Основные поля, как правило, заданы относительно осей цилиндрической системы координат. Когда накопительное кольцо или имеет форму круга, или разделено на круговые секторы пустыми промежутками, использование цилиндрических координат упрощает анализ спиновых эффектов. Уравнение движения спина в цилиндрической системе координат совпадает с соответствующим уравнением в системе, вращающейся вместе с частицей (вращающаяся система отсчета), поскольку горизонтальные оси цилиндрической системы координат вращаются с мгновенной угловой частотой вращения частицы в накопительном кольце. Движение частиц во вращающейся системе отсчета является сравнительно медленным, поскольку оно может быть обусловлено только осцилляциями и другими отклонениями частиц от идеальной траектории. Следовательно, различиями между движением спина в цилиндрической системе координат и в системе покоя частицы во многих случаях можно пренебречь.

Общее уравнение движения спина в цилиндрической системе координат имеет вид (19). Хотя поля, определяющие возмущения траектории частиц, существенно влияют на движение спина, величиной $o$, зависящей от радиальной и вертикальной компонент импульса частицы, характеризующих эти возмущения, в рассматриваемом случае можно пренебречь.

Для создания резонанса должны быть использованы радиочастотные резонаторы. Электрическое поле в резонаторе генерируется вдоль центральной линии, а магнитное поле направлено перпендикулярно [21]. Магнитное поле вдоль центральной линии равно нулю. Если резонаторы идеально размещены и ориентированы в продольном направлении, магнитное поле не может привести к какому-либо резонансному эффекту. Резонансный эффект, ведущий к РВП, обусловлен слагаемыми, пропорциональными $\eta$. Следовательно, наблюдаемый РВП соответствует определенному значению ЭДМ. Однако как смещение, так и угловое отклонение центральной линии радиочастотного резонатора от усредненной траектории частиц приводит к аналогичному поведению спина, имитирующему наличие ЭДМ. В результате они создают систематические ошибки измерения ЭДМ. Однако, как правило, вызванное этими систематическими ошибками движение спина находится не в резонансе с прецессией спина в горизонтальной плоскости. Поэтому наличие систематических ошибок создает шум и приводит к быстрым осцилляциям вертикальной компоненты вектора поляризации [11, 12, 13, 22]. Помимо этих эффектов, систематическая ошибка может создаваться радиальным магнитным полем в системе покоя частицы, осциллирующим с резонансной частотой. В эксперименте по поиску ЭДМ дейтрона аналогичная ошибка будет устраняться путем попеременного создания двух пучков с различными частотами бетатронных колебаний [11, 13, 22]. В настоящей работе мы рассчитываем только эффекты, создаваемые резонансными полями в идеальных условиях, и не рассматриваем систематические ошибки.

Поскольку скорость осциллирует, вертикальное магнитное поле создает резонансную часть радиального электрического поля в системе покоя частицы. Таким образом, мы рассматриваем постоянное вертикальное магнитное и осциллирующее продольное электрическое поля в лабораторной системе отсчета. Это согласуется с уравнением (27). Резонансные слагаемые в выражении для угловой скорости вращения спина пропорциональны ЭДМ:

$$\mathbf{\Omega}_{EDM} = -\frac{e\eta}{2m}\left[\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}\right]. \tag{30}$$

Поляризация циркулирующего пучка дейтронов может быть измерена путем столкновений дейтронов с углеродной мишенью и наблюдения продуктов реакций, генерируемых ядерными взаимодействиями [8, 23]. Поляризация циркулирующего пучка протонов может быть определена путем упругого протон-протонного рассеяния (см. [23, 24] и цитированную там литературу).

## 8. Резонансные напряженности в эксперименте по поиску электрических дипольных моментов

В эксперименте по поиску электрического дипольного момента дейтрона угловая частота вынужденных продольных колебаний $\omega$ должна быть очень близкой к угловой частоте вращения спина (g$-$2-частоте) $\omega_0$ и близка к собственной частоте свободных синхротронных колебаний (синхротронной частоте) [13]. Величина $\omega_0$ почти равна вертикальной компоненте $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{a}$, поскольку другие компоненты этого (псевдо)вектора относительно малы:

$$\omega_0 = \left(\omega_a\right)_z = -\frac{ea}{m}B_0. \tag{31}$$

В уравнении (31) $B_0$ – усредненное вертикальное магнитное поле. Мы полагаем, что заряд частицы положителен и магнитное поле направлено вверх ($B_0 > 0$). Циклотронная частота определяется формулой

$$\omega_c = -\frac{eB_0}{\gamma_0 m}, \tag{32}$$

где $\gamma_0$ – усредненный лоренц-фактор. Знак минус означает, что частица вращается по часовой стрелке ($\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{e}_\varphi < 0, \omega_c < 0$).

Поскольку осциллирующее электрическое поле направлено продольно,

$$\mathbf{E} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{E}) = \frac{1}{\gamma}\mathbf{E}. \tag{33}$$

Если мы рассматриваем только поля, определяющие электрическое поле в системе покоя частицы, движение спина в горизонтальной плоскости описывается уравнением (30), где $\boldsymbol{\beta} = -\beta\mathbf{e}_\varphi$.

Действие резонансных электрического и квазиэлектрического ($\mathbf{G} \equiv \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}$) полей на ЭДМ аналогично действию резонансных магнитного и квазимагнитного ($-\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}$) полей на магнитный момент. Следовательно, ранее полученные выражения для резонансных напряженностей (см. [25, 26, 27] и цитированную там литературу) могут быть использованы при анализе взаимодействий, зависящих от ЭДМ. Для ЭДМ-эксперимента возможными являются два режима с большими когерентными осцилляциями: строго линейный (использующий, например, специально созданный радиочастотный резонатор для линеаризации колебаний) и сильно нелинейный с хорошо стабилизированными когерентными колебаниями (см. [13] и цитированную там литературу). Мы ограничиваемся рассмотрением линейных колебаний.

Удобно использовать величину

$$\Phi = \phi(t) - \phi(0) = \omega_c t,$$

где $\phi$ – азимут, характеризующий расположение частицы в заданный момент времени. Дистанция, проходимая частицей, равна

$$L_b = \frac{\beta c}{\omega_c}\Phi = \beta c t.$$

Подобно магнитным полям радиочастотных диполя и соленоида [25, 26, 27], продольное магнитное поле в резонаторе (радиочастотной полости) может быть выражено через дельта-функции:

$$\mathbf{E} = E_0 \frac{L(\Phi)}{\rho}\sin(\omega t + \varphi)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}, \quad L(\Phi) = l\sum_{N=-\infty}^{\infty}\delta(\Phi - \Phi_0 - 2\pi N), \quad \rho = -\frac{\beta c}{\omega_c}, \tag{34}$$

где $E_0, \omega$ и $\varphi$ – это амплитуда, угловая частота и фаза электрического поля, действующего на частицу, $l$ – длина резонатора, азимут $\Phi_0$ определяет угловое расположение резонатора и $\rho$ – радиус кривизны. Уравнение (30) выражает взаимодействие ЭДМ с электрическим полем во вращающейся системе отсчета через поля в лабораторной системе. Поскольку угловая частота $\omega$ характеризует колебания электрического поля не в фиксированной точке, а в точке расположения движущейся с релятивистской скоростью частицы, величина $\omega$ не совпадает с угловой частотой резонатора.

Уравнение движения частицы

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} \tag{35}$$

определяет осциллирующую часть импульса:

$$\mathbf{p} = -\left[p_0 + \Delta p_0 \cos(\omega t + \varphi)\right]\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \Delta p_0 = \frac{eE_0 L(\Phi)}{\omega\rho}. \tag{36}$$

Уравнение (36) позволяет найти кусочно-постоянный импульс в дугах накопительного кольца.

Мы можем произвести вычисления с учетом членов первого порядка по $\Delta\beta_0$ и пренебречь колебаниями пучка на нерезонансных частотах. В этом случае нормализованная скорость определяется выражением:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 + p^2}} = -\left[\beta_0 + \Delta\beta_0 \cos(\omega t + \varphi)\right]\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{37}$$

где

$$\beta_0 = \frac{p_0}{m\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{\sqrt{m^2 + p_0^2}}{m}, \quad \Delta\beta_0 = \frac{\Delta p_0}{m\gamma_0^3} = \frac{eE_0 L(\Phi)}{m\gamma_0^3 \omega\rho}. \tag{38}$$

Уравнения (27), (30) – (38) приводят к следующей зависимости:

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\Phi} = \mathbf{F}\times\mathbf{S}, \quad \mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_\rho + F_2\mathbf{e}_\varphi + F_3\mathbf{e}_z$$

$$= \frac{e\eta}{2p_0} E_0 L(\Phi)[\frac{\omega_0}{a\gamma_0^2\omega}\cos(\nu\Phi+\varphi)\mathbf{e}_\rho + \sin(\nu\Phi+\varphi)\mathbf{e}_\varphi] + a\gamma_0\mathbf{e}_z, \tag{39}$$

где $F_3 = a\gamma_0$ – нормализованная частота прецессии спина и $\nu = \omega/\omega_c$.

Удобно использовать метод резонансных напряженностей, базирующийся на разложении в ряд Фурье [4, 28, 29]:

$$F_1 - iF_2 = \sum_{K=-\infty}^{\infty} \varepsilon_K e^{-i\nu_K\Phi}, \quad \nu_K = \omega_K/\omega_c. \tag{40}$$

В этом уравнении резонансные напряженности $\varepsilon_K$ – это амплитуды Фурье, соответствующие нормализованным резонансным частотам $\nu_K$, а $\omega_K$ – это частоты гармоник. В рассматриваемом случае [4, 25]

$$\nu_K = K \pm \nu, \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{41}$$

Резонансные напряженности определяются уравнением:

$$\varepsilon_K = \frac{1}{2\pi N}\int_{(N)} (F_1 - iF_2) e^{i\nu_K\Phi} d\Phi, \tag{42}$$

где интегрирование должно производиться по бесконечному числу витков $N \to \infty$.

Уравнения (34), (39), (41), (42) приводят к следующему выражению для резонансных напряженностей:

$$\varepsilon_K^+ = \frac{e\eta}{8\pi p_0} E_0 l \left(\frac{\omega_0}{a\gamma_0^2\omega} + 1\right) e^{i(K\Phi_0 - \varphi)},$$

$$\varepsilon_K^- = \frac{e\eta}{8\pi p_0} E_0 l \left(\frac{\omega_0}{a\gamma_0^2\omega} - 1\right) e^{i(K\Phi_0 + \varphi)}, \tag{43}$$

где $\varepsilon_K^+$ и $\varepsilon_K^-$ соответствуют знакам плюс и минус в уравнении (41). Естественно, зависимость от $K$ в показателях экспонент может быть устранена соответствующим выбором начальной фазы ($\Phi_0 = 0$).

Уравнение (43) может быть также выведено путем разложения дельта-функций в ряд Фурье [27]:

$$\sin(\nu\Phi + \varphi)\sum_{N=-\infty}^{\infty} \delta(\Phi - \Phi_0 - 2\pi N) = \frac{1}{2\pi}\sum_{N=-\infty}^{\infty} \sin[\pm N(\Phi - \Phi_0) + \nu\Phi + \varphi],$$

$$\cos(\nu\Phi+\varphi)\sum_{N=-\infty}^{\infty}\delta(\Phi-\Phi_0-2\pi N)=\frac{1}{2\pi}\sum_{N=-\infty}^{\infty}\cos[\pm N(\Phi-\Phi_0)+\nu\Phi+\varphi]. \quad (44)$$

Уравнения (39) и (43) определяют соотношение между величинами $F_1, F_2$ и резонансными напряженностями, которое согласуется с аналогичными соотношениями, выведенными в [25, 26, 27] для локализованных радиочастотных магнитных полей. Такое согласие является важным, поскольку результаты, полученные в [25, 26], были поставлены под сомнение в [30, 31, 32].

Основное различие между уравнением (43) и соответствующими уравнениями для резонансных напряженностей, выведенными в [25, 26, 27], состоит в несовпадении выражений для $\varepsilon_K^+$ и $\varepsilon_K^-$. Это несовпадение обусловлено более сложным видом вектора прецессии спина $\mathbf{F}$ в исследуемом случае. Уравнение (39) показывает, что этот вектор имеет ненулевые компоненты по двум горизонтальным осям, различающиеся по фазе на $\pi/2$.

Подстановка $\varepsilon_K$ в уравнение (40) приводит к соотношению

$$Q=F_1-iF_2=\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left[\varepsilon_K^+e^{-i(K+\nu)\Phi}+\varepsilon_K^-e^{-i(K-\nu)\Phi}\right]=$$

$$=\frac{e\eta}{8\pi p_0}E_0 l\sum_{K=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{\omega_0}{a\gamma_0^2\omega}+1\right)e^{-i[K(\Phi-\Phi_0)+\nu\Phi+\varphi]}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\omega_0}{a\gamma_0^2\omega}-1\right)e^{-i[K(\Phi-\Phi_0)-\nu\Phi-\varphi]}\right\}. \quad (45)$$

Поскольку $F_1$ и $F_2$ – действительные величины, они определяются формулами

$$F_1=\mathrm{Re}(Q),\quad F_2=-\mathrm{Im}(Q). \quad (46)$$

В результате уравнение (39) приобретает вид

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\Phi}=[\mathrm{Re}(Q)\mathbf{e}_\rho-\mathrm{Im}(Q)\mathbf{e}_\varphi+a\gamma_0\mathbf{e}_z]\times\mathbf{S}=$$

$$=\Big(\sum_{K=-\infty}^{\infty}\{\mathrm{Re}\left[\varepsilon_K^+e^{-i(K+\nu)\Phi}+\varepsilon_K^-e^{-i(K-\nu)\Phi}\right]\mathbf{e}_\rho-$$

$$-\mathrm{Im}\left[\varepsilon_K^+e^{-i(K+\nu)\Phi}+\varepsilon_K^-e^{-i(K-\nu)\Phi}\right]\mathbf{e}_\varphi\}+a\gamma_0\mathbf{e}_z\Big)\times\mathbf{S}. \quad (47)$$

Уравнения (43) и (47) полностью определяют динамику спина в эксперименте по поиску ЭДМ.

Модуляция скорости, определяемая уравнениями (37), (38), может быть выражена через резонансные напряженности. Использование разложения Фурье (44) приводит уравнение (37) к следующему виду:

$$\boldsymbol{\beta}=-\left\{\beta_0+\Delta\beta_m\sum_{K=-\infty}^{\infty}\cos[\pm K(\Phi-\Phi_0)+\nu\Phi+\varphi]\right\}\mathbf{e}_\varphi, \quad (48)$$

где амплитуда модуляции скорости имеет вид

$$\Delta\beta_m = -\frac{e\omega_0}{2\pi a\gamma_0^3 p_0 \omega} E_0 l. \tag{49}$$

Уравнения (43), (48), (49) приводят к формуле

$$\boldsymbol{\beta} = \left\{ -\beta_0 + \frac{2}{\eta\gamma_0} \left[ \left(1 + \frac{a\gamma_0^2\omega}{\omega_0}\right)^{-1} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \varepsilon_K^+ e^{-i(K+\nu)\Phi} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(1 - \frac{a\gamma_0^2\omega}{\omega_0}\right)^{-1} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \varepsilon_K^- e^{-i(K-\nu)\Phi} \right] \right\} \mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}. \tag{50}$$

Зависимость между резонансными напряженностями и амплитудой модуляции скорости имеет вид

$$\varepsilon_K^+ = -\frac{\eta\gamma_0}{4}\left(1 + \frac{a\gamma_0^2\omega}{\omega_0}\right)\Delta\beta_m e^{i(K\Phi_0 - \varphi)},$$

$$\varepsilon_K^- = -\frac{\eta\gamma_0}{4}\left(1 - \frac{a\gamma_0^2\omega}{\omega_0}\right)\Delta\beta_m e^{i(K\Phi_0 + \varphi)}. \tag{51}$$

## 9. Эффекты, обусловленные резонансными электрическим и магнитным полями

Спин вращается против часовой стрелки (по часовой стрелке), если $\omega_0$ положительно (отрицательно). Резонансное поле должно вращаться в том же направлении, и его частота должна быть очень близка к частоте вращения спина ($\omega_0 \approx \omega_c \nu_R$ и $a\gamma_0 \approx \nu_R$, где индекс $K = R$ определяет резонанс). Влияние нерезонансных гармоник и полей, вращающихся в противоположном направлении, обращается в нуль в среднем [4, 20]. Следовательно, уравнение (47) содержит нерезонансные члены, которые должны быть устранены. Результирующее уравнение имеет вид

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\Phi} = \mathbf{F}\times\mathbf{S}, \quad \mathbf{F} = \mathrm{Re}\left[\varepsilon_R^{\pm} e^{-i(R\pm\nu)\Phi}\right]\mathbf{e}_{\boldsymbol{\rho}} - \mathrm{Im}\left[\varepsilon_R^{\pm} e^{-i(R\pm\nu)\Phi}\right]\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}} + a\gamma_0\mathbf{e}_{\mathbf{z}} =$$

$$= \frac{e\eta}{8\pi p_0} E_0 l \left(\frac{\omega_0}{a\gamma_0^2\omega} \pm 1\right)\mathbf{e}_{\parallel} + a\gamma_0 \mathbf{e}_{\mathbf{z}},$$

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \cos(\Psi)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\rho}} + \sin(\Psi)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \Psi = R(\Phi - \Phi_0) \pm (\nu\Phi + \varphi), \tag{52}$$

где $\mathbf{e}_{\parallel}$ – единичный вектор, вращающийся в горизонтальной плоскости с нормализованной угловой частотой $\nu_R = R \pm \nu$.

Первое и второе слагаемые в множителе $\left(\frac{\omega_0}{a\gamma_0^2\omega} \pm 1\right)$ обусловлены магнитным и электрическим полями соответственно. Влияние электрического поля характеризуется отношениями вкладов электрического и магнитного полей:

$$k=\frac{a\gamma_0^2\omega}{\omega_0}. \tag{53}$$

Амплитуда резонансного квазиэлектрического поля равна

$$G_0=\frac{E_0}{k\gamma_0}. \tag{54}$$

Уравнения (52) – (54) справедливы при любом соотношении между величинами $\omega_0$ и $\omega$.

Отношение (53) имеет существенно различные значения для протона и дейтрона. Гиромагнитная аномалия для протона приблизительно в 12.5 раза больше, чем для дейтрона. К тому же для дейтрона гиромагнитная аномалия отрицательна. Резонанс на частоте $\omega\approx\omega_0=a\gamma_0\omega_c$ является доминирующей гармоникой для дейтрона. Для этой гармоники $R=0$. В планируемом эксперименте по поиску электрического дипольного момента дейтрона величина $k$ равна $k_d=-0.234$, $p_0=1.5$ ГэВ/c ($\gamma_0=1.28$). Поправка, обусловленная электрическим полем, существенна, поскольку она приводит к возрастанию эффекта, обусловленного ЭДМ, на 23 % для дейтрона. Хотя вклад магнитного поля в эффект РВП является доминирующим, учет данной поправки необходим.

Для протона величины $a_p=1.7928$ и $a_p\gamma_0$ близки к 2 и угловая частота $\omega=\omega_0$, соответствующая гармонике $R=0$, слишком велика [33]. Поэтому удобнее модулировать скорость протона с другой угловой частотой [33] $\omega\approx\omega_0-2\omega_c$, которая соответствует нормализованной резонансной частоте $\nu_R=2+\nu$ (величина $\nu$ положительна, а $\omega$ – отрицательна).

Можно выбрать кинетическую энергию протонов, равной $T=161$ МэВ [33]. Этот выбор дает $\gamma_0=1.172, \nu=0.1005, \omega/\omega_0=\nu/(a\gamma_0)=0.0478$. Отношение (53) равно $k_p=0.118$. Учет поправки на электрическое поле приводит к увеличению эффекта, обусловленного ЭДМ, на 12 %. Хотя вклад магнитного поля в этот эффект является доминирующим, поправка на электрическое поле весьма важна и должна учитываться при расчете эффекта.

## 10. Резонансная динамика спина

Для расчета резонансной динамики спина может быть использована теория магнитного резонанса [20]. На спин действуют вертикальное магнитное поле, которое вращает его в горизонтальной плоскости, и резонансные электрическое и квазиэлектрическое поля. Другие поля с нормализованными резонансными частотами $\nu_K$, которые далеки от нормализованной частоты вращения спина $a\gamma_0$, могут не рассматриваться. Резонансная динамика спина определяется уравнением (52), и вектор $\mathbf{e}_{\parallel}$ вращается с нормализованной частотой $\nu_R\approx a\gamma_0$.

Для описания динамики спина удобно использовать систему отсчета, вращающуюся с угловой частотой $\omega_R=\omega_c\nu_R$ [20] по отношению к осям цилиндрической системы координат. В этой системе отсчета вертикальная компонента угловой скорости вращения спина значительно меньше, чем в цилиндрической системе координат. В лабораторной системе вектор $\mathbf{e}_{\parallel}$ вращается с угловой частотой, которая существенно отличается от $\omega$ вследствие вращения осей цилиндрической системы координат в этой системе.

Если радиальное и продольное направления в системе отсчета, сопровождающей спин, совпадают с такими же направлениями в цилиндрической системе координат в начальный момент времени $t=0$, то они определяются единичными векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{\boldsymbol{\rho}} &= \cos(\nu_R\Phi)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\rho}} + \sin(\nu_R\Phi)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}, \\ \mathbf{e}'_{\boldsymbol{\varphi}} &= -\sin(\nu_R\Phi)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\rho}} + \cos(\nu_R\Phi)\mathbf{e}_{\boldsymbol{\varphi}}. \end{aligned} \tag{55}$$

Все величины в системе отсчета, сопровождающей спин, отмечены штрихами. Угловая скорость спина равна [20]

$$\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}} - \omega_R\mathbf{e}_{\mathbf{z}} = \omega_c\mathbf{F} - \omega_R\mathbf{e}_{\mathbf{z}}, \tag{56}$$

где $\mathbf{F}$ определяется уравнением (52). Направление вектора $\boldsymbol{\Omega}'$ фиксировано [20], поскольку единичный вектор $\mathbf{e}_{\parallel}$ преобразуется к виду

$$\mathbf{e}_{\parallel} = \cos(\zeta')\mathbf{e}'_{\boldsymbol{\rho}} + \sin(\zeta')\mathbf{e}'_{\boldsymbol{\varphi}}, \quad \zeta' = -R\Phi_0 \pm \varphi.$$

Нормализованная частота прецессии спина в системе отсчета, сопровождающей спин, равна

$$\nu' = \left|\frac{\boldsymbol{\Omega}'}{\omega_c}\right| = \sqrt{(a\gamma_0 - \nu_R^{\pm})^2 + |\,\varepsilon_R^{\pm}\,|^2}, \tag{57}$$

где

$$\nu_R^{+} = R + \nu, \quad \nu_R^{-} = R - \nu.$$

В резонансном ЭДМ-эксперименте предполагается использовать горизонтальную начальную поляризацию пучка. Динамика спина частиц зависит от направления спина в начальный момент времени, определяемого азимутом $\psi$. Азимут $\psi=0$ соответствует радиальной начальной поляризации в лабораторной системе. РВП характеризуется $z$-компонентой вектора поляризации.

Поскольку траектории частиц в пучке зависят от их импульсов, соответствующие значения $\omega_0$ могли бы различаться. Однако существуют экспериментальные методы, позволяющие удержать частоту и фазу вынужденных когерентных продольных колебаний почти равными частоте и фазе вращения спина. Для этого длина прямых участков траектории выбирается такой, чтобы выполнялось равенство

$$\alpha_p = \frac{\Delta p/p}{\Delta L/L} = 1,$$

где $\Delta p = p - p_0,\ \Delta L = L - L_0,\ L \equiv L(p),\ L_0 \equiv L(p_0)$ и $L(p)$ – длина замкнутой орбиты для импульса $p$. В этом случае $p/L = p_0/L_0$. Так как $p = m\gamma(p)\omega_c(p)\rho(p)$ и $\rho/L = \rho_0/L_0$, g−2-частота не зависит от импульса частиц, то $a\gamma(p)\omega_c(p) = a\gamma(p_0)\omega_c(p_0)$ и $\omega_c(p) = \omega_c(p_0)$ [13].

Поскольку величины $\omega_R$ и $\omega_0$ могут несколько различаться и необходимо определить систематическую ошибку, обусловленную ненулевой разностью $\omega_0 - \omega_R$, необходимо использовать общие формулы, определяющие динамику спина. Здесь и ниже в формулы будет включена скорость света $c$.

Динамика вертикальной компоненты вектора поляризации во вращающейся и лабораторной системах отсчета описывается одним и тем же уравнением, которое имеет вид

$$P_z(\Phi) = \frac{\varepsilon'}{\nu'} P_0 \left\{ \sin(\psi - \zeta')\sin(\nu'\Phi) + \frac{a\gamma_0 - \nu_R}{\nu'} \cos(\psi - \zeta')\left[1 - \cos(\nu'\Phi)\right] \right\},$$
$$\varepsilon' = \frac{e\eta}{8\pi c p_0} E_0 l \left( \frac{\omega_0}{a\gamma_0^2 \omega} \pm 1 \right), \tag{58}$$

где $\varepsilon'$ – амплитуда резонансной напряженности ($|\varepsilon'| = |\varepsilon_R^{\pm}|$) и $P_0$ – начальная поляризация пучка.

Уравнения (52), (56) определяют эволюцию других компонент вектора поляризации:

$$P_\rho(\Phi) = P_0 \{\cos(\nu'\Phi)\cos(\nu_R\Phi + \psi) + \frac{\varepsilon'^2}{\nu'^2}\cos(\psi - \zeta')\left[1 - \cos(\nu'\Phi)\right]\cos(\nu_R\Phi + \zeta') -$$
$$- \frac{a\gamma_0 - \nu_R}{\nu'} \sin(\nu'\Phi)\sin(\nu_R\Phi + \psi)\},$$
$$P_\phi(\Phi) = P_0 \{\cos(\nu'\Phi)\sin(\nu_R\Phi + \psi) + \frac{\varepsilon'^2}{\nu'^2}\cos(\psi - \zeta')\left[1 - \cos(\nu'\Phi)\right]\sin(\nu_R\Phi + \zeta') +$$
$$+ \frac{a\gamma_0 - \nu_R}{\nu'} \sin(\nu'\Phi)\cos(\nu_R\Phi + \psi)\}. \tag{59}$$

Важно, что подстановка $\nu' \to -\nu'$ не изменяет значений компонент вектора поляризации, и, следовательно, величины $\nu'$ и $\nu'\Phi$ могут быть заменены величинами $\Omega'/\omega_c$ и $\Omega' t$ соответственно.

Если $\nu'\Phi \ll 1\,(\Omega' t \ll 1)$,

$$P_\rho(\Phi) = P_0\left[\cos(\nu_R\Phi + \psi) - (a\gamma_0 - \nu_R)\Phi \sin(\nu_R\Phi + \psi)\right],$$
$$P_\phi(\Phi) = P_0\left[\sin(\nu_R\Phi + \psi) + (a\gamma_0 - \nu_R)\Phi \cos(\nu_R\Phi + \psi)\right], \tag{60}$$

$$P_z = P_0 \varepsilon' \Phi \sin(\psi - \zeta') = \frac{e\eta}{8\pi c p_0} P_0 E_0 l \left( \frac{\omega_0}{a\gamma_0^2 \omega} \pm 1 \right) \omega_c t \sin(\psi - \zeta'). \tag{61}$$

Для эксперимента по поиску электрического дипольного момента дейтрона

$\omega \approx \omega_0, \zeta' = \varphi$, и в уравнении (61) должен быть выбран знак плюс. Если используется угол $\Upsilon = \psi - \pi/2$, характеризующий начальное направление спина относительно оси $e_\phi$, то

$$\sin(\psi - \zeta') = \cos(\Upsilon - \zeta') = \cos(\Upsilon - \varphi)$$

и уравнение (61) приобретает вид

$$\begin{aligned} P_z &= \frac{e\eta}{8\pi c p_0} P_0 E_0 l \left( \frac{1}{a\gamma_0^2} + 1 \right) \omega_c t \cos(\Upsilon - \varphi) \\ &= \frac{e\eta}{8\pi \beta_0 c^2 p_0} P_0 E_0 l \left( \frac{1}{a\gamma_0^2} + 1 \right) \omega_c L_b \cos(\Upsilon - \varphi). \end{aligned} \tag{62}$$

Из уравнений (49), (62) следует, что

$$P_z = -\frac{1}{4} \eta P_0 \Delta\beta_m \gamma_0 \left(1 + a\gamma_0^2\right) \omega_c t \cos(\Upsilon - \varphi). \tag{63}$$

Соответствующая формула, полученная в [11,13], имеет вид

$$P_z = \frac{1}{4} \eta P_0 \Delta\beta_m \gamma_0 \omega_c t, \tag{64}$$

где использованы обозначения, принятые в настоящей работе. В работах [11, 13] был рассмотрен только частный случай $\omega_0 = \omega, \Psi = \varphi$.

Уравнение (64) отличается от уравнения (63) отсутствием множителя $(1 + a\gamma_0^2)$. Это совершенно естественно, поскольку в [11, 13] не было учтено влияние электрического поля на динамику спина. Формула, полученная в [11, 13], должна быть дополнена данным множителем. Знаки в уравнениях (63) и (64) противоположны, поскольку в работах [11, 13] величина $\omega_c$ считалась положительной.

## 11. Вклады электрического и магнитного полей в рост вертикальной поляризации в эксперименте, основанном на методе замораживания спина

Интересно сравнить отношение (53) с соответствующим отношением для ЭДМ-эксперимента, основанного на методе «замораживания» спина. Радиальное электрическое поле в этом эксперименте выбирается равным [7]

$$E = \frac{a\beta\gamma^2}{1 - a\beta^2\gamma^2} B.$$

Отношение вкладов электрического и магнитного полей в РВП, обусловленный ЭДМ, имеет вид

$$\kappa = \frac{E}{|\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}|} = \frac{a\gamma^2}{1 - a\beta^2\gamma^2}. \tag{65}$$

Для эксперимента с пучком дейтронов [8] $a = a_d = -0.14299, \beta = 0.35, \gamma = 1.068$ и $\kappa = 0.17$. Следовательно, в эксперименте, основанном на методе «замораживания» спина, влияние электрического поля на РВП необходимо учитывать. Вклад электрического поля пренебрежимо мал в аналогичном эксперименте с мюонами ($a_\mu = 1.1659 \times 10^{-3}$) и является доминирующим в эксперименте с протонами ($a_p = 1.7928$).

## 12. Заключение

В настоящей работе найден оператор Гамильтона в представлении Фолди – Ваутхойзена для релятивистских частиц, имеющих электрический и магнитный дипольные моменты и взаимодействующих с электромагнитным полем. Выведено квантово-механическое уравнение движения спина. Проведен переход к квазиклассическому приближению и найдено квазиклассическое уравнение движения спина.

Выведена точная формула, определяющая угловую скорость движения частицы в накопительном кольце в горизонтальной плоскости. Найдено точное уравнение движения спина в цилиндрической системе координат с учетом ЭДМ частиц. Это уравнение удобно для аналитического расчета динамики спина, когда конфигурация основных полей достаточно проста. Такой расчет может быть необходим для ряда прецизионных экспериментов. Цилиндрические координаты могут использоваться, когда накопительное кольцо или имеет форму круга, или разделено на круговые секторы пустыми промежутками. Произведено усреднение угловой скорости вращения спина.

Рост вертикальной поляризации в эксперименте по поиску ЭДМ при помощи резонансного метода стимулируется горизонтальным электрическим полем в системе покоя частицы, осциллирующим с резонансной частотой. Это поле определяется преобразованием Лоренца осциллирующего продольного электрического и однородного вертикального магнитного полей. Вклад продольного электрического поля значителен, хотя вклад магнитного поля, обусловленный вынужденными когерентными продольными колебаниями частиц, является доминирующим. Влияние электрического поля на динамику спина не было учтено в предшествующих исследованиях. Учет поправки, даваемой электрическим полем, весьма важен, поскольку он приводит к увеличению эффекта на 23 % для дейтрона и уменьшению его на 12 % для протона. Эффективные поля, определяющие резонансный эффект в эксперименте по поиску ЭДМ, выражены через резонансные напряженности. Динамика спина в эксперименте по поиску ЭДМ дейтрона при помощи резонансного метода рассчитана в общем случае. В предшествующих работах был рассмотрен только частный случай, причем влияние электрического поля на динамику спина не учитывалось.

## Литература


1. *Foldy L. L., Wouthuysen S. A.* // Phys. Rev. 1950. Vol. 78. P. 29.
2. *Costella J. P., McKellar B. H. J.* // Am. J. Phys. 1995. Vol. 63. P. 1119.
3. *Silenko A. J.* // J. Math. Phys. 2003. Vol. 44. P. 2952.
4. *Courant E. D.* // Bull. Am. Phys. Soc. 1962. Vol. 7. P. 33; *Courant E. D., Ruth R. D.* //

BNL Report № 51270, 1980.
5. *Semertzidis Y. K.* // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 2003. Vol. 117. P. 373; hep-ph/0211038; *Bennett G. W.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92. P. 161802.
6. *Farley F. J. M., Semertzidis Y. K.* // Prog. Part. Nucl. Phys. 2004. Vol. 52. P. 1.
7. *Farley F. J. M., Jungmann K* et al. // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 93. P. 052001.
8. *Silenko A.* et al. // EDM Collaboration *J-PARC* Letter of Intent: Search for a Permanent Muon Electric Dipole Moment at the $10^{-24}$ e·cm Level, http://www.bnl.gov/ edm/papers/jparc_loi_030109.ps; *Aoki M.* et al. // http://www.bnl.gov/ edm/deuteron_proposal_040816.pdf.
9. *Accomando E., Arnowitt R., Dutta B.* // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 61. P. 115003; *Babu K. S., Dutta B., Mohapatra R. N.* // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 85. P. 5064; *Lebedev O., Olive K. A.* et al. // Phys. Rev. D. 2004. Vol. 70. P. 016003.
10. *Nelson D. F., Schupp A. A.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1959. Vol. 2, P. 492.
11. *Orlov Y. F.* // EDM in Storage Rings Internal Note № 69, 2004; STORI 2005 Conf. Proc., Schriften des Forschungszentrums Jülich, Matter and Materials. 2005. Vol. 30. P. 223.
12. *Semertzidis Y. K.* // STORI 2005 Conf. Proc., Schriften des Forschungszentrums Jülich, Matter and Materials. 2005. Vol. 30. P. 70.
13. *Orlov Y. F., Morse W. M., Semertzidis Y. K.* // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96. P. 214802.
14. *Feng J. L., Matchev K. T., Shadmi Y.* // Nucl. Phys. B. 2001. Vol. 613, P. 366.
15 *Graesser M., Thomas S.* // Phys. Rev. D. 2002. Vol. 65. P. 075012.
15. *Багров В. Г., Бордовицын В. А.* // Известия ВУЗ. Физика. 1980. № 2, С. 67.
16. *Thomas L. H.* // Nature. 1926. Vol. 117, P. 514; Philos. Mag. 1927. Vol. 3, P. 1.
17. *Frenkel J.* // Zeits. f. Phys. 1926. Vol. 37. P. 243.
18. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L.* // Phys. Rev. Lett. 1959. Vol. 2. P. 435.
19. *Slichter C. P.* Principles of Magnetic Resonance: With Examples from Solid State Physics. 1963; Principles of Magnetic Resonance, 3rd ed. 1990.
20. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics, 2nd ed. 1975. P. 355.
21. *Semertzidis Y. K.* // EDM in Storage Rings Internal Notes № 82, 85, 92, 2005.
22. *Chiladze D.* et al. // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2006. Vol. 9. P. 050101.
23. *Altmeier M.* et al. // Eur. Phys. J. A 2005. Vol. 23. P. 351.
24. *Roser T.*/ Handbook of Accelerator Physics and Engineering. 1999. P. 151.
25. *Bai M., MacKay W. W., Roser T.* // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2005. Vol. 8. P. 099001.
26. *Lee S. Y.* // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2006. Vol. 9. P. 074001.
27. *Lee S. Y.* Spin Dynamics and Snakes in Synchrotrons. 1997.
28. *Minty M. G., Zimmermann F.* Measurement and Control of Charged Particle Beams. 2003. Chap. 10.
29. *Morozov V. S.* et al. // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2004. Vol. 7. P. 024002.
30. *Morozov V. S.* et al. // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2005. Vol. 8. P. 099002.
31. *Leonova M. A.* et al. // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2006. Vol. 9. P. 051001.
32. *Stephenson E.* // EDM in Storage Rings Internal Note № 78, 2005.

## SPIN DYNAMICS IN EXPERIMENTS ON A SEARCH FOR ELECTRIC DIPOLE MOMENTS OF PARTICLES, PERFORMED IN STORAGE RINGS

**A. J. Silenko**

The Hamilton operator in the Foldy-Wouthuysen representation for relativistic particles having electric and magnetic dipole moments and interacting with an electromagnetic field has been found. The transition to the semiclassical description has been fulfilled. Quantum-mechanical and classical equations of spin motion have been derived.

The exact formula for the angular velocity of particle motion in the horizontal plane has been obtained. The exact equation defining the spin motion in the cylindrical coordinate system with allowance for the particle electric dipole moments of particles has been derived. This equation is convenient for analytical calculations of spin dynamics when the configuration of the main fields is simple enough. Such calculations can be needed for several high-precision experiments. Cylindrical coordinates can be used if the ring is either circular or divided into circular sectors. Averaging of the angular velocity of spin rotation has been performed.

A buildup of the vertical polarization in the resonant electric-dipole-moment experiment [13] is affected by a horizontal electric field in the particle rest frame oscillating at a resonant frequency. This field is defined by the Lorentz transformation of an oscillating longitudinal electric field and a uniform vertical magnetic one. The effect of a longitudinal electric field is significant, while the contribution from a magnetic field caused by forced coherent longitudinal oscillations of particles is dominant. The effect of electric field on the spin dynamics has not been taken into account in previous calculations. The electric-field correction is important because it leads to decreasing the electric-dipole-moment effect by 23 percent for the deuteron and increasing it by 12 percent for the proton. The effective fields defining the resonant effect have been expressed in terms of the resonance strengths. The spin dynamics in the resonant deuteron electric-dipole-moment experiment has been calculated in the general case. In previous works, the special case has only been considered and the effect of the electric field on the spin dynamics has not been taken into account.