ОДНОРОДНЫЕ ЭРМИТОВЫ f-МНОГООБРАЗИЯ

В. В. Балащенко

Инвариантным структурам традиционно (и заслуженно) принадлежит ведущая роль при исследовании дифференциально-геометрических структур на гладких многообразиях. Именно благодаря широкому классу инвариантных примеров был получен ряд глубоких результатов в период бурного развития эрмитовой геометрии (см., например, [1]–[3]), причем поток исследований здесь не ослабевает и сейчас. Наряду с этим изучение почти контактных структур и их приложений, f-структур К. Яно ($f^3+f=0$) и других обобщений привело к созданию в 80-х годах в работах В. Ф. Кириченко стройной концепции *обобщенной эрмитовой геометрии* (см., например, [4]). Число исследований в этом новом направлении стремительно растет, причем в различных аспектах (см., например, [5]), а потому все ощутимее становится отсутствие инвариантных примеров.

Ситуация качественно изменилась в последнее время в связи с полным решением проблемы описания канонических структур классического типа на регулярных Φ-пространствах [6]. Был обнаружен богатый запас канонических f-структур (в том числе почти комплексных структур), которые позволили предъявить большие классы инвариантных примеров в обобщенной эрмитовой геометрии (см. [7], [8]), что обеспечило преемственность классических результатов Дж. Вольфа и А. Грея в эрмитовой геометрии.

Алгебраической основой выделения важнейших классов *обобщенных почти эрмитовых структур* являются свойства присоединенной Q-алгебры [4]. В случае метрической f-структуры композиционный тензор T вычислен в [4] явно:

$$4T(X,Y)=f\bigl(\nabla_{fX}(f)fY-\nabla_{f^2X}(f)f^2Y\bigr),$$

где X, Y – векторные поля на M. Антикоммутативность Q-алгебры ($T(X,X)=0$) определяет *обобщенные G_1-структуры*, а ее абелевость ($T(X,Y)=0$) – *обобщенные эрмитовы структуры*. Для случая метрической f-структуры будем называть их *G_1f-структурой* и *эрмитовой f-структурой* соответственно. Очевидно, что в частном случае $f=J$ ($J^2=-1$) получаем в точности классические понятия G_1-структуры и эрмитовой структуры (см., например, [9]). При этом эрмитова f-структура, в отличие от классического случая, не всегда интегрируема.

В данной заметке указаны обширные классы инвариантных G_1f-структур и эрмитовых f-структур, при этом особую роль играют канонические f-структуры на однородных Φ-пространствах порядка k (*k-симметрических пространствах* в терминологии [10]).

Пусть $(G/H,g,f)$ – однородное редуктивное пространство группы Ли G с инвариантной (псевдо-) римановой метрикой g и инвариантной метрической f-структурой, $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$ – соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Условимся не различать в обозначениях инвариантные структуры на G/H и их значения в точке $o=H$. Структура f порождает ортогональное разложение $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1=\operatorname{Im} f$ и $\mathfrak{m}_2=\operatorname{Ker} f$ определяют соответственно первое и второе фундаментальные распределения для f. Напомним, что $(G/H,g)$ называется *естественно редуктивным*, если $g([X,Y]_{\mathfrak{m}},Z)=g(X,[Y,Z]_{\mathfrak{m}})$ для всех $X,Y,Z\in\mathfrak{m}$, где индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения.

Теорема 1. *Любая инвариантная метрическая f-структура на естественно редуктивном пространстве $(G/H,g)$ является G_1f-структурой.*

Как частный случай, отсюда получаем

Следствие. *На естественно редуктивном пространстве $(G/H,g)$ любая инвариантная почти эрмитова структура принадлежит классу G_1.*

Отметим, что это утверждение по эрмитовой геометрии получено в работе [11].

Теорема 2. *Пусть $(G/H,g,f)$ – естественно редуктивное пространство с инвариантной метрической f-структурой, для которой выполняется условие $[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_1]\subset\mathfrak{m}_2\oplus\mathfrak{h}$. Тогда G/H – эрмитово f-многообразие.*

Далее будем рассматривать регулярные Φ-пространства (обобщенные симметрические пространства [10]), на которых имеется значительный запас канонических структур f и J [6].

Пусть G/H – регулярное Φ-пространство, определяемое автоморфизмом Φ связной группы Ли G, $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$ – каноническое редуктивное разложение, соответствующее автоморфизму $\varphi=d\Phi_e$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathfrak{m}=A_\varphi\mathfrak{g}$, где $A_\varphi=\varphi-\mathrm{id}$ [12]. Обозначим через θ сужение φ на $\mathfrak{m}$. Инвариантная аффинорная структура F на G/H называется *канонической* [6], если она в точке o является полиномом $F=F(\theta)$. Все однородные Φ-пространства порядка k ($\Phi^k=\mathrm{id}$) регулярны [12], и для таких пространств в [6] получены формулы для всех канонических структур типов f и J. Всюду в дальнейшем под естественно редуктивным разложением подразумевается каноническое редуктивное разложение для G/H. Например, для полупростой группы G метрика g, порождаемая формой Киллинга на любом регулярном Φ-пространстве G/H, естественно редуктивна (см. [12]). Важно отметить, что все канонические структуры f и J с такой метрикой согласованы [7].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $(G/H,g)$ – естественно редуктивное однородное Φ-пространство порядка k. Любая каноническая метрическая f-структура на G/H является G_1f-структурой, а любая каноническая почти эрмитова структура J входит в класс G_1.*

Отметим особую роль однородных Φ-пространств порядков 4 и 5:

ТЕОРЕМА 4. *Естественно редуктивное Φ-пространство $(G/H,g,f)$ порядка 4, где $f=\frac{1}{2}(\theta-\theta^3)$ – каноническая метрическая f-структура, является эрмитовым f-многообразием.*

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $(G/H,g)$ – естественно редуктивное Φ-пространство порядка 5, f_1 и f_2 – канонические метрические f-структуры на G/H (см. [6]). Тогда $(G/H,g,f_i)$, $i=1,2$, является эрмитовым f-многообразием.*

Таким образом, указанные в теоремах 4 и 5 канонические f-структуры обеспечивают широкий класс первых примеров инвариантных эрмитовых f-структур, которые в общем случае не являются интегрируемыми. Более того, имеющаяся детальная классификация однородных Φ-пространств порядков 4 и 5 классических компактных групп Ли (см. [13], [14]) позволяет поэтому предъявить явную серию однородных эрмитовых f-многообразий.

Известным примером риманова однородного Φ-пространства порядка 4, метрика которого не является естественно редуктивной, служит 6-мерная обобщенная группа Гейзенберга (см. [15]).

ТЕОРЕМА 6. *6-мерная обобщенная группа Гейзенберга (N,g) относительно канонической f-структуры однородного Φ-пространства порядка 4 является однородным эрмитовым f-многообразием.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] J. Wolf, A. Gray // J. Differential Geom. 1968. V. 2. №1–2. P. 77–159. [**2**] A. Gray // J. Differential Geom. 1972. V. 7. №3–4. P. 343–369. [**3**] В. Ф. Кириченко // Матем. заметки. 1981. Т. 30. №4. С. 569–582. [**4**] В. Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 18. М.: ВИНИТИ, 1986. С. 25–71. [**5**] В. Ф. Кириченко, Л. В. Липагина // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. №5. С. 127–146. [**6**] В. В. Балащенко, Н. А. Степанов // Матем. сб. 1995. Т. 186. №11. С. 3–34. [**7**] V. V. Balashchenko. Riemannian geometry of canonical structures on regular Φ-spaces // Preprint №174/1994: Ruhr-Universität Bochum, 1994. [**8**] В. В. Балащенко // УМН. 1999. Т. 54. №3. С. 151–152. [**9**] A. Gray, L. M. Hervella // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1980. V. 123. №4. P. 35–58. [**10**] О. Ковальский. Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984. [**11**] E. Abbena, S. Garbiero // Nihonkai Math. J. 1993. V. 4. №1. P. 1–15. [**12**] Н. А. Степанов // Изв. вузов. Матем. 1967. №3. С. 88–95. [**13**] J. A. Jimenez // Trans. Amer. Math. Soc. 1988. V. 306. №2. P. 715–734. [**14**] Gr. Tsagas, Ph. Xenos // Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.). 1987. V. 31. №1. P. 57–77. [**15**] F. Tricerri, L. Vanhecke. Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1983. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 83.)

Белорусский государственный университет, Минск
E-mail: vitaly@mmf.bsu.unibel.by

Принято редколлегией
29.03.2001