

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ**

Кафедра методов оптимального управления

ЦИТОВИЧ
Полина Викторовна

**УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ ДИСКРЕТНЫХ
УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ДЛЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Дипломная работа

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
профессор В.В. Альсевич

Допущена к защите

<<____>> _____ 2021 г.

Зав. кафедрой методов оптимального управления
кандидат физ.-мат. наук,
доцент Н.М. Дмитрук

Минск, 2021

РЕФЕРАТ

Дипломная работа, 27 с., 7 источников.

ОСОБОЕ ДИСКРЕТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ПЕРЕМЕННОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ.

Объектом исследования является задача исследования условий оптимальности особого дискретного управления для систем с переменным запаздыванием.

Основные методы исследования – методы оптимизации.

Цель работы – изучение условий оптимальности особых дискретных управляющих воздействий для систем с переменным запаздыванием.

Результатом исследования является доказанный дискретный принцип максимума, доказанное необходимое условие оптимальности второго порядка для поставленной задачи.

РЭФЕРАТ

Дыпломная работа, 27 с., 7 рэсурсаў.

АСОБАЕ ДЫСКРЭТНАЕ КІРАВАННЕ, ПЕРАМЕННАЕ ЗАПАЗНЕННЕМ.

Аб'ектам даследавання з'яўляецца задача даследавання ўмоў аптымальнасці асаблівага дыскрэтнага кіравання для сістэм з пераменным запазненнем.

Асноўныя метады даследавання – метады аптымізацыі.

Мэта працы – вывучэнне ўмоў аптымальнасці асаблівых дыскрэтных кіраўнікоў уздзеянняў для сістэм з пераменным запазненнем.

Вынікам даследавання з'яўляецца даказаны дыскрэтны прынцып максімуму, даказанае неабходная ўмова аптымальнасці другога парадку для пастаўленай задачы.

ABSTRACT

Graduation work, 27 p., 7 sources.

SPECIAL DISCRETE CONTROL, VARIABLE DELAY.

The object of the study is the problem of finding the optimality conditions for special discrete control for systems with variable delay.

The main research methods are optimization methods.

The aim of the work is to study the optimality conditions of special discrete control actions for systems with variable delay.

The result of the study is a proven discrete maximum principle, a proven necessary condition of second-order optimality for the problem.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	6
1. Постановка задачи.....	9
1.1 Формула Коши.....	10
1.2 Формула приращения функционала качества второго порядка.....	11
2. Условия оптимальности. Дискретный принцип максимума	19
2.1 Условие оптимальности второго порядка	19
Литература	27

Введение

Теория оптимального управления, отражающая своевременный этап развития вариационного исчисления, возникла в середине 20 века в связи с задачами, поставленными практикой в различных областях развития новой техники. Они содержали математические задачи, экстремальные по своей сущности, и не укладывались в рамки классического вариационного исчисления.

В работах по исследованию оптимальных управлений также был выведен универсальный способ выражения принципа максимума Понтрягина[1], который в будущем получил широкое распространение на классы дифференциальных систем. Универсальность исследования заключается в том, что был найден способ формирования сопряженной системы. Сопряженная система является одним из ключевых моментов при формулировке принципа максимума. Также для решения задач оптимального управления используется прямая система, которая описывает траектории тел.

Опишем простейшую задачу терминального управления.

Пусть $J(u)$ – функционал качества следующего вида:

$$J(u) = \varphi(x(t^*)) \rightarrow \min. \quad (1)$$

Пусть поведение объекта управления описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u), t \in T = [0, t^*], \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x = x(t)$ – состояние объекта в момент времени t .

Пусть также имеем значение управляющего воздействия:

$$u = u(t) \in \mathbf{R}^r, t \in T, \quad (3)$$

где t – скаляр, обозначающий время; x_0 – начальное состояние объекта управления; T – промежуток времени, на котором производится исследование.

Класс доступных управляющих воздействий представляет собой кусочно-непрерывные функции $u(t) \in U, t \in T$, где $U \subset \mathbf{R}^r$ – заданное множество.

Функции $\varphi(x)$, $f(x, u)$, $x, u \in U$ непрерывны вместе с $\partial f / \partial x$, $\partial \varphi / \partial x$.

Гамильтониан представим в виде:

$$H(x, \psi, u) = \psi' f(x, u).$$

Для обыкновенных систем сопряженная функция $\psi(t)$ является решением следующей системы:

$$\dot{\psi} = - \frac{\partial H(x^0(t), \psi, u^0(t))}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\psi(t_1) = - \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}. \quad (5)$$

Будем называть эту система называется сопряженной, а (5) условием трансверсальности.

Рассмотрим задачу (1) – (3) в классе дискретных управляющих воздействий.

Управляющее воздействие называется дискретным с периодом квантования $h > 0$ ($h = \frac{t_1}{N}$, где N – натуральное число), если:

$$u(t) = u(\tau), t \in [\tau, \tau + h[, \tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, t_1 - h\}.$$

Дискретные управляющие воздействия отличаются от кусочно-постоянных тем, что их точками разрыва могут быть только моменты множества T_h .

Ранее в [6] для данной задачи было доказано для задачи в общем виде.

Теорема 1 (дискретный принцип максимума). *Для того чтобы управление $u^0(t)$, $t \in T$ в задаче (1) – (3) было оптимальным, необходимо, чтобы вдоль него и соответствующих решений $x(t)$, $t \in T$, прямой системы (2) и $\psi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы (4) – (5) удовлетворяет условию максимума:*

$$\int_t^{t+h} H(x(s), \psi(s), u(t)) ds = \max_{u \in U} \int_t^{t+h} H(x(s), \psi(s), u) ds, t \in T_h. \quad (6)$$

Допустимое управление $u^*(t)$, $t \in T$ называется экстремалью Понтрягина, если оно вместе со своими функциями $x^*(t)$, $\psi^*(t)$, – решениями исходной системы (2) и сопряженной системы (4) – (5), удовлетворяют условию максимума Понтрягина. Из принципа максимума следует, что каждое оптимальное управление есть экстремаль Понтрягина. Из этого следует, что задача оптимального управления сводится к выделению среди экстремалей Понтрягина наилучшего управления. Если в рассматриваемой задаче всего она экстремаль Понтрягина, а также известно, что решение существует, то эта экстремаль и будет искомым оптимальным управлением.

Ранее в классе кусочно-непрерывных управлений были исследованы ситуации, когда принцип максимума не является информативным (то есть возникают особые режимы), а значит и об оптимальности управления сказать ничего нельзя.

В отличие от имеющихся результатов, в данной дипломной работе исследуется задача оптимального управления системой с переменным запаздыванием по состоянию, а также приводится дискретный принцип максимума для систем с запаздыванием, когда в качестве допустимых управлений рассматриваются дискретные функции.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу терминального управления со свободным правым концом траектории:

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

на траекториях динамической системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t - \alpha(t)), u(t)), t \in T = [t_0, t_1], \quad (1.2)$$

с начальным условием

$$x(\tau) = x_0(\tau), \tau \in [t_0 - \alpha(t), t_0], \quad (1.3)$$

а также управляющими воздействиями

$$u = u(t) \in U, t \in T. \quad (1.4)$$

Ранее в [2] было показано, что оптимальное управление $u(t) \in U, t \in T$, в задаче (1.1) – (1.4) в классе кусочно-непрерывных управлений удовлетворяет условию максимума:

$$H(x(t), x(t - \alpha(t)), \psi(t), u(t)) = \max_{v \in U} H(x(t), x(t - \alpha(t)), \psi(t), v), \quad (1.5)$$
$$t \in T.$$

Условие (1.5) иногда вырождается и становится неэффективным при проверке управления на оптимальность. Как обычно, допустимое управление $u(t) \in U, t \in T$, назовем особым, если существуют такие множества $\omega \subseteq T, \text{mes} \omega > 0, V(t) \subseteq U, t \in \omega$, включающие в себя более одного элемента, что для всех $v \in V(t), t \in \omega$ выполняется тождество $\Delta_v H(t) \equiv 0$. Для упрощения будем считать, что

$$\omega = T, V(t) = U.$$

Пусть в задаче (2.1) – (2.3) управляющие воздействия – дискретные функции и, кроме того, имеем

$$\begin{aligned} f(x, y, u) &= B(x, y)u, & B(x, y) &\in \mathbf{R}^{n \times r}, \\ x &\in \mathbf{R}^n, & u &\in U. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь U – выпуклый компакт, $B(x, y)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, где $y = y(t) = x(t - \alpha(t))$, $\alpha(t)$, $t \in T$, – запаздывание.

Введем функцию $\tau = v(t)$, где $v(t) = t - \alpha(t)$, $t \in T$. Также наложим условия на функцию $\alpha(t)$: $0 < \dot{\alpha}(t) < 1$. В силу данного условия $\dot{v}(t) > 0$, то есть $v(t)$ является непрерывно-дифференцируемой возрастающей функцией. Значит, существует непрерывно дифференцируемая обратная функция $t = r(\tau)$.

1.1 Формула Коши

Прежде чем доказывать основной результат, получим формулу для представления решения линейного дифференциального уравнения (в векторной форме) с запаздыванием (аналог формулы Коши). Пусть система имеет вид:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(v(t)) + g(t), t \in T, \quad (1.7)$$

с начальными условиями (1.3).

Пусть $x(\tau)$, $\tau \in T$, – решение уравнения (1.7). Тогда вдоль него соотношение (1.7) выполняется тождественно. Умножим тождество (1.7), заменив t на τ , на матричную функцию $F(t, \tau)$, $t \in T$, $\tau \in [t_0, t]$, свойства которой указаны ниже, и проинтегрируем по τ от t_0 до t :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t F(t, \tau) \dot{x}(\tau) d\tau &= \int_{t_0}^t F(t, \tau) A(\tau) x(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{v(t_0)}^{v(t)} F(t, r(\tau)) A_1(r(\tau)) x(\tau) \dot{r}(t) d\tau + \int_{t_0}^t F_0(t, \tau) g(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Полагая

$$F(t, \tau) \equiv 0, \tau > t, F(t, t-0) = E, \quad (1.9)$$

левая часть равенства (1.8) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t F(t, \tau) \dot{x}(\tau) d\tau &= F(t, t)x(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} x(\tau) d\tau = \\ &= x(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Определим функцию $F(t, \tau)$ как решение уравнения

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial \tau} = -F(t, \tau)A(\tau) - F(t, r(\tau))A_1(r(\tau))\dot{r}(\tau). \quad (1.11)$$

В силу соотношений (1.10), (1.11) равенство (1.8) примет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{v(t_0)}^{t_0} F(t, r(\tau)) A_1(r(\tau)) x_0(\tau) \dot{r}(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^t F(t, \tau) g(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.2 Формула приращения функционала качества второго порядка

Найдем приращение функционала (1.1) вдоль траекторий системы (1.2).

Пусть $u(t)$, $\tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$ – допустимые управления.

Обозначим через $x(t)$, $\tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ – соответствующие им решения исходной системы дифференциальных уравнений (1.2).

Тогда рассмотрим приращение функционала качества (1.1):

$$\begin{aligned}\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = \varphi(\tilde{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1)) &= \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi'(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) + o(||\Delta x(t_1)||^2).\end{aligned}\quad (1.13)$$

Определим функции $\psi(t)$, $\Psi(t)$, $t \in T$, как решения следующих уравнений

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t)}{\partial x} - \frac{\partial H(r(t))}{\partial y} \dot{r}(t), t \in T, \quad (1.14)$$

$$\psi(t_1) = -\frac{\partial \varphi(x(t_1))}{\partial x}, \quad \psi(t) = 0, t > t_1. \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned}\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial f'(t)}{\partial x} \Psi(t) - \Psi(t) \frac{\partial f(t)}{\partial x} - \\ -\frac{\partial^2 H(t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H(r(t))}{\partial y^2} \dot{r}(t),\end{aligned}\quad (1.16)$$

$$\Psi(t_1) = -\frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2}, \quad \Psi(t) = 0, t > t_1. \quad (1.17)$$

Тогда с помощью введенных функций приращение (1.13) критерия качества можно свести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta_{\tilde{u}(t)} H(t) + \Delta_{\tilde{u}(t)} \frac{\partial H'(t)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial H'(t, \tilde{u}(t))}{\partial y} \Delta y(t) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \Delta_{\tilde{u}(t)} \frac{\partial^2 H'(t)}{\partial x^2} \Delta x(t) + \frac{1}{2} \Delta y'(t) \frac{\partial^2 H'(t, \tilde{u}(t))}{\partial y^2} \Delta y(t) + \\
& + \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H'(t, \tilde{u}(t))}{\partial x \partial y} \Delta y(t) + \Delta_{\tilde{u}(t)} f'(t) \Psi(t) \Delta x(t) + \\
& \left. + \Delta x'(t) \Delta_{\tilde{u}(t)} \frac{\partial f'(t)}{\partial x} \Psi(t) \Delta x(t) + \Delta y'(t) \frac{\partial f'(t, \tilde{u}(t))}{\partial x} \Psi(t) \Delta x(t) \right] dt + \\
& + \eta_1.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

η_1 – некоторый остаточный член порядка $o\left(\|\Delta z(t)\|^2\right)$, $z = (x', y')'$.

Преобразуем (1.18).

Из формулы приращения первого порядка при помощи векторных импульсов $\psi(t)$, удовлетворяющих системе (1.14) – (1.15), можно записать:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x, y, \psi, u, t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} [H(\tilde{x}, \tilde{y}, \psi, \tilde{u}, t) - H(x, y, \psi, \tilde{u}, t)] dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H'(x(t), y(t), \psi(t), u(t))}{\partial x} \Delta x(t) \right] dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H'(x(t), y(t), \psi(t), u(t))}{\partial y} \Delta y(t) \right] dt.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Поскольку можно расписать:

$$\begin{aligned}
H(\tilde{x}, \tilde{y}, \psi, \tilde{u}) - H(x, y, \psi, \tilde{u}) &= \frac{\partial H'(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial x} \Delta x(t) + \\
&+ \frac{\partial H'(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial y} \Delta y(t) + \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial x \partial y} \Delta y(t) + \\
&+ \frac{1}{2} \Delta y'(t) \frac{\partial^2 H(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial y^2} \Delta y(t) + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial x^2} \Delta x(t) + \\
&+ o_2 \left(\|\Delta x(t)\|^2 + \|\Delta y(t)\|^2 \right).
\end{aligned}$$

Тогда равенство (1.19) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) &= - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(x, y, \psi, u) dt - \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H'(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{1}{2} \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial x^2} \Delta x(t) + \right. \\
&+ \frac{\partial H'(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial y} \Delta y(t) + \frac{1}{2} \Delta y'(t) \frac{\partial^2 H(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial y^2} \Delta y(t) + \\
&+ \Delta x'(t) \frac{\partial^2 H(x, y, \psi, \tilde{u})}{\partial x \partial y} \Delta y(t) + o_2 \left(\|\Delta x(t)\|^2 + \|\Delta y(t)\|^2 \right) \Big] dt.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Преобразуем второе слагаемое в формуле (1.13).

$$\begin{aligned}
\Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi'(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) &= - \int_{t_0}^{t_1} [\Delta \dot{x}'(t) \Psi(t) \Delta x(t) + \\
&+ \Delta x'(t) \dot{\Psi}(t) \Delta x(t) + \Delta x'(t) \Psi(t) \Delta \dot{x}(t)] dt.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

В силу (1.2) учтем, что:

$$\begin{aligned}
\Delta \dot{x}(t) &= f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) - f(x, y, u) = \Delta_{\tilde{u}} f(x, y, u) + \\
&+ \frac{\partial f(x, y, \tilde{u})}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial f(x, y, \tilde{u})}{\partial y} \Delta y(t) + \\
&+ o_1(|\Delta x(t)| + |\Delta y(t)|).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Подставим (1.22) в (1.21):

$$\begin{aligned}
\Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi'(x(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) &= -2 \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} f'(x, y, u, t) \Psi(t) \Delta x(t) - \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\dot{\Psi}(t) + \frac{\partial f'(x, y, \tilde{u}, t)}{\partial x} \Psi(t) + \Psi(t) \frac{\partial f(x, y, \tilde{u}, t)}{\partial x} \right] \Delta x(t) dt - \\
&- \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\dot{\Psi}(t) + \frac{\partial f'(x, y, \tilde{u}, t)}{\partial y} \Psi(t) + \Psi(t) \frac{\partial f(x, y, \tilde{u}, t)}{\partial y} \right] \Delta x(t) dt - \\
&- 2 \int_{t_0}^{t_1} o'_1(|\Delta x(t)| + |\Delta y(t)|) \Psi(t) \Delta x(t) dt.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Для сокращения записей обозначаем гамильтониан:

$$H(t) = H(x(t), y(t), \psi(t), u(t)) = \psi'(t) B(x(t), y(t)) u(t).$$

Здесь $\psi(t)$, $t \in T$, – решение сопряженной системы (1.14) – (1.15).

А также правую часть:

$$f(t) = B(x(t), y(t)) u(t), \quad t \in T.$$

Умножим обе части равенства (1.23) на $\frac{1}{2}$ и сложим почленно с (1.20).

Вспоминая представление (1.13), имеем:

$$\begin{aligned}
\Delta J(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta_{\tilde{u}} \frac{\partial H'(t)}{\partial x} + \Delta_{\tilde{u}} f'(t) \Psi(t) \right] \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\frac{\partial^2 H'(t)}{\partial x \partial y} + \Psi(t) \frac{\partial f(t)}{\partial y} \right] \Delta x(v(t)) dt + \eta.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

В формуле (1.24) остаточный член $\eta = \eta_1 + \eta_2$, где:

$$\begin{aligned}
\eta_1 = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\dot{\Psi}(t) + \frac{\partial f(x(t), y(t), \tilde{u}(t))}{\partial x} \Psi(t) + \Psi(t) \frac{\partial f(x(t), y(t), \tilde{u}(t))}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 H(x(t), y(t), \psi(t), \tilde{u}(t))}{\partial x^2} \right] \Delta x(t) dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial f(x(t), y(t), \tilde{u}(t))}{\partial y} \Psi(t) + \Psi(t) \frac{\partial f(x(t), y(t), \tilde{u}(t))}{\partial y} \right] \Delta y(t) dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \Delta y'(t) \frac{\partial^2 H(x(t), y(t), \psi(t), \tilde{u}(t))}{\partial y^2} \Delta y(t) dt. \\
\eta_2 = & \int_{t_0}^{t_1} o'_1(|\Delta x(t)| + |\Delta y(t)|) \Psi(t) \Delta x(t) dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} o_2(|\Delta x(t)|^2 + |\Delta y(t)|^2) dt - o(|\Delta x(t_1)|^2 + |\Delta y(t_1)|^2).
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Приведем формулу (1.24) к виду, необходимому для доказательства условия оптимальности второго порядка.

Линеаризованную до первого порядка систему (1.2) в приращениях можно записать следующим образом:

$$\Delta \dot{x}(\tau) = A(\tau)\Delta x(\tau) + A_1(\tau)\Delta y(\tau) + g(\tau), \tau \in T; \Delta x \equiv 0, \tau \leq t_0, \quad (1.26)$$

где:

$$\begin{aligned} g(\tau) = o(||\Delta z(\tau)||) + \Delta_{\tilde{u}} \frac{\partial f(\tau, u)}{\partial x} \Delta x(\tau) + \Delta_{\tilde{u}} \frac{\partial f(\tau, u)}{\partial y} \Delta y(\tau) + \\ + \Delta_{\tilde{u}} f(\tau, u), \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$A(\tau) = \frac{\partial f(\tau)}{\partial x}, \quad A_1(\tau) = \frac{\partial f(\tau)}{\partial y}.$$

Система (1.26) имеет вид (1.7). Ее решение представимо в виде (1.12), где матричная функция $F(t, \tau)$ определяется формулами (1.9), (1.11).

С учетом (1.12) преобразуем последний интеграл в (1.24), имеем:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\frac{\partial^2 H'(t)}{\partial x \partial y} + \Psi(t) \frac{\partial f(t, u)}{\partial y} \right] \Delta x(v(t)) dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[\frac{\partial^2 H'(t)}{\partial x \partial y} + \Psi(t) \frac{\partial f(t, u)}{\partial y} \right] \int_{t_0}^{v(t)} F(v(t), \tau) \Delta_{\tilde{u}(\tau)} f(\tau, u) d\tau dt + \eta_4. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (1.24) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta J(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}(t)} H(t) dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \left[\Delta_{\tilde{u}(t)} \frac{\partial H'(t)}{\partial x} + \Delta_{\tilde{u}(t)} f'(t, u) \Psi(t) \right] \Delta x(t) dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_0}^{v(t)} \Delta x'(t) \left(\left[\frac{\partial^2 H'(t, \tilde{u}(t))}{\partial x \partial y} + \Psi(t) \frac{\partial f(t, u)}{\partial y} \right] \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot \int_{t_0}^{v(t)} F(v(t), \tau) \Delta_{\tilde{u}(\tau)} f(\tau, u) d\tau \right) dt + \eta_5
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Формула (1.28) является формулой приращения критерия качества.

2. Условия оптимальности. Дискретный принцип максимума

Пусть $u(t)$, $t \in T$, – допустимое управление в задаче (1.1) – (1.3), $x(t)$, $t \in T$, – соответствующее решение системы (1.2).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (дискретный принцип максимума). *Для того чтобы управление $u^0(t)$, $t \in T$ в задаче (1.1) – (1.3) было оптимальным, необходимо, чтобы вдоль него и соответствующих решений $x(t)$, $t \in T$, прямой системы (1.2) и $\psi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы удовлетворяет условию максимума:*

$$\int_t^{t+h} H(x(s), y(s), \psi(s), u(t)) ds = \max_{u \in U} \int_t^{t+h} H(x(s), y(s), \psi(s), u) ds, t \in T_h. \quad (2.1)$$

Очевидно, условие (2.1) в силу вида функции $f(x, y, u)$ принимает следующую форму:

$$\left(\int_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s)) ds \right) u(t) = \max_{u \in U} \left(\int_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s)) ds \right) u, t \in T_h. \quad (2.2)$$

Условие (2.2) доказывается аналогично условию с постоянным запаздыванием в [5].

2.1 Условие оптимальности второго порядка

Пусть существует допустимое управление $u(t)$, $x(t)$ – соответствующая ему траектория, а $\psi(t)$ – соответствующее решение сопряженной системы, и

существует $\tilde{T}_h \in T$, $V(t) \in U$, $t \in \tilde{T}_h$ такие, что на управлении $u(t)$, $t \in \tilde{T}_h$ и соответствующих решениях $x(t)$, $t \in \tilde{T}_h$, и $\psi(t)$, $t \in \tilde{T}_h$, а также выполняется тождество:

$$\left[\int_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s)) ds \right] u(t) = \left[\int_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s)) ds \right] v, \\ v \in V(t), \quad u \in U. \quad (2.3)$$

Управление $u(t)$, $t \in T$ для которого выполняется тождество (2.3), назовем особым в задаче (1.1) – (1.3), (1.6).

Для простоты будем считать, что $V(t) = U$.

Условия (2.4) возможны в случаях:

- $\psi'(s)B(x(s), y(s)) = 0$, $s \in [t, t + h]$, $t \in \tilde{T}_h$;
- $\int_t^{t+h} \psi'(s) B(x(s), y(s)) ds = 0$, $t \in \tilde{T}_h$.

Для доказательства условия оптимальности второго порядка необходимо ввести следующие вспомогательные функции.

$$G(\tau, t) = \left[\frac{\partial^2 H'(\tau)}{\partial x \partial y} + \Psi(\tau) \frac{\partial f(\tau, u)}{\partial y} \right] F(v(\tau), t). \quad (2.4)$$

$$D(\tau, t) = F'(\tau, t)G(\tau, t) + G'(\tau, t)F(\tau, t). \quad (2.5)$$

$$C(t) = \int_{t_0}^{v(t)} D(\tau, t) d\tau. \quad (2.6)$$

$$\bar{\Psi}(t) = \Psi(t) + C(t), \quad (2.7)$$

где $\Psi(t)$ – решение матричного уравнения (1.16) – (1.17), $C(t)$ определена в формуле (2.6). $F(\tau, t)$ – решение уравнения (1.11), (1.9).

Теорема 2 (Необходимое условие оптимальности второго порядка).

Для оптимальности особого управления $u(t)$, $t \in T$ в задаче (1.1) – (1.4) необходимо, чтобы вдоль него и соответствующих решений $x(t)$, $t \in T$, прямой системы и $\psi(t)$, $t \in T$, сопряженной системы (1.14) – (1.15) выполнялись условия:

- для $t \in T_h - \tilde{T}_h$ условие максимума (2.2);
- для $t \in \tilde{T}_h$ условие следующего вида:

$$\begin{aligned} & (v - u(t))' \left(\int_t^{t+h} \left[\left(B'(\tau) \bar{\Psi}(\tau) + \left(\frac{\partial \psi'(\tau) B(\tau)}{\partial x} \right)' \right) \int_t^\tau B(s) ds \right] d\tau \right) \times \\ & \times (v - u(t)) \leq 0, \forall v \in U, t \in T_h. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Доказательство.

Докажем от противного, т.е. существуют такие момент $\theta \in \tilde{T}_h$ и вектор $v \in U$, что условие (2.8) не выполняется. Через β обозначим левую часть неравенства при $t = \theta$, тогда из предположения следует, что $\beta > 0$.

Построим вектор:

$$v(\varepsilon) = u^0(\theta) + \varepsilon(v - u^0(\theta)), \theta \in T. \quad (2.9)$$

Поскольку U – выпуклое множество, то $v(\varepsilon) \in U$ для $\forall \varepsilon \in [0, 1]$. Проварьируем программу $u(t) \in U, t \in T$, вариацией:

Рассмотрим вариацию управления (1.4):

$$\Delta_{\theta v} u^0(t) = \begin{cases} v(\varepsilon) - u^0(t), & t \in [\theta, \theta + h[, \\ 0, & t \notin [\theta, \theta + h[, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$t \in T_h.$$

Необходимо показать, что на этой вариации управления справедлива оценка $||\Delta x(t)|| \sim \varepsilon, t \in T, ||\Delta y(t)|| \sim \varepsilon, t \in T$. Тогда докажем, что $\eta_5 \sim o(\varepsilon^2)$.

Из постановки задачи имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\Delta \dot{x}(t) = B(x(t), y(t))v(\varepsilon) - B(x^0(t), y(t))u^0(\theta),$$

$$t \in [\theta, \theta + \alpha(\theta)[.$$

Проинтегрируем последнее равенство:

$$\Delta x(t) = \int_{\theta}^t B(x^0(s), y^0(s))ds \cdot [v(\varepsilon) - u^0(\theta)] +$$

$$+ \int_{\theta}^t [B(x(s), y(s)) - B(x^0(s), y^0(s))]ds \cdot v(\varepsilon), \quad t \in [\theta, \theta + h[. \quad (2.11)$$

Первое слагаемое из (2.11) порядка ε из построения вектора (2.9):

$$\int_{\theta}^t B(x^0(s), y^0(s))ds \cdot [v(\varepsilon) - u^0(\theta)] = \varepsilon \int_{\theta}^t [B(x^0(s), y^0(s))]ds \cdot (v - u^0(\theta)).$$

Распишем в ряд Тейлора второе слагаемое из (2.11):

$$\int_{\theta}^t [B(x(s), y(s)) - B(x^0(s), y^0(s))]ds \cdot v(\varepsilon) =$$

$$= \int_{\theta}^t \left[B(x^0(s), y^0(s)) + \frac{\partial B(x^0(s), y^0(s))}{\partial x} \Delta x(s) + \frac{\partial B(x^0(s), y^0(s))}{\partial y} \Delta y(s) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \Delta x'(s) \frac{\partial^2 B(x^0(s), y^0(s))}{\partial x^2} \Delta x(s) + \frac{1}{2} \Delta y'(s) \frac{\partial^2 B(x^0(s), y^0(s))}{\partial y^2} \Delta y(s) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta x'(s) \frac{\partial^2 B(x^0(s), y^0(s))}{\partial x \partial y} \Delta y(s) - B(x^0(s), y^0(s)) \Big] ds \cdot v(\varepsilon) + \\
& + \int_{\theta}^t o(|\Delta x(s)|^2 + |\Delta y(s)|^2) ds = \\
& = \int_{\theta}^t \left[\frac{\partial B(x^0(s), y^0(s))}{\partial x} \Delta x(s) + \frac{\partial B(x^0(s), y^0(s))}{\partial y} \Delta y(s) \right. \\
& + \frac{1}{2} \Delta x'(s) \frac{\partial^2 B(x^0(s), y^0(s))}{\partial x^2} \Delta x(s) + \frac{1}{2} \Delta y'(s) \frac{\partial^2 B(x^0(s), y^0(s))}{\partial y^2} \Delta y(s) \\
& \left. + \Delta x'(s) \frac{\partial^2 B(x^0(s), y^0(s))}{\partial x \partial y} \Delta y(s) \right] ds \cdot v(\varepsilon) + \\
& + \int_{\theta}^t o(|\Delta x(s)|^2 + |\Delta y(s)|^2) ds \sim \varepsilon, \quad t \in [\theta, \theta + h]. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

В формуле (2.12) $\Delta y(t) = 0, t \in [\theta, \theta + h]$, так как $\Delta y(t) = \Delta x(v(t))$ и $\Delta x(t) = 0, t \in [0, \theta]$.

Кроме того, порядок $\Delta y(t), t \in [\theta, \theta + \alpha(\theta)]$ равен порядку $\Delta x(t), t \in [\theta, \theta + \alpha(\theta)]$, то есть $\Delta y(t) \sim \varepsilon, t \in [\theta, \theta + \alpha(\theta)]$.

Из постановки задачи имеем, что $B(x, y), x, y \in X$ – непрерывно дифференцируемые функции. Тогда справедливо условие Липшица:

$$\begin{aligned}
& \|B(x(s), y(s)) - B(x^0(s), y^0(s))\| \leq L \cdot \|\Delta x(s)\| \cdot \|\Delta y(s)\|, \\
& s \in [\theta, \theta + \alpha(\theta)]. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

L – константа Липшица, в силу ограниченности траектории их можно выбрать не зависящими от ε . Из (2.11) с учетом (2.9), (2.12), (2.13) получим:

$$\|\Delta x(t)\| \leq \varepsilon \int_{\theta}^t \|B(x^0(s), y^0(s)) \cdot (v(\varepsilon) - u^0(\theta))\| ds +$$

$$\begin{aligned}
& +L \int_{\theta}^t ||\Delta x(s)|| ds \cdot ||v(\varepsilon)|| + L \int_{\theta}^t ||\Delta y(s)|| ds \cdot ||v(\varepsilon)|| \leq \\
& \leq \varepsilon \left(\int_{\theta}^{\theta+h} ||B(x^0(s), y^0(s))|| ds \right) \cdot ||v - u^0(\theta)|| + L \cdot ||v(\varepsilon)|| \cdot \int_{\theta}^t ||\Delta x(s)|| ds. \\
& \quad + L \cdot ||v(\varepsilon)|| \cdot \int_{\theta}^t ||\Delta y(s)|| ds.
\end{aligned}$$

После полученных оценок приращение оптимальной траектории можно преобразовать следующим образом:

$$\Delta_{\theta v} x^0(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [\theta, \theta + h], \\ \varepsilon \left(\int_{\theta}^t B(x^0(s), y^0(s)) ds \right) (v - u^0(\theta)) + o_1(\varepsilon), & t \in [\theta, \theta + h]. \end{cases} \quad (2.14)$$

Отсюда видно, что $\Delta_{\theta v} x^0(t)$ порядка ε .

Подсчитаем приращение функционала, которое может быть вызвано вариацией (2.10). С учетом определения особого управления и свойства приращения траектории, преобразуем (1.28) с помощью введенных функций (2.4), (2.5), (2.6):

$$\begin{aligned}
\Delta_{\theta v} J(u) = & - \int_{\theta}^{\theta+h} \left[\Delta_{\tilde{u}(t)} \frac{\partial H'(t)}{\partial x} + \Delta_{\tilde{u}(t)} f'(t) \Psi(t) \right] \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{\theta}^{\theta+h} \int_{t_0}^{v(t)} G(\tau, t) \Delta_{\tilde{u}(t)} f(t) d\tau dt + \eta_5.
\end{aligned} \quad (2.15)$$

В итоге с учетом (2.14) получим следующую оценку приращения критерия качества:

$$\Delta_{\theta v} J(u) = -\frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\theta}^{\theta+h} \left[\Delta_{\tilde{u}(t)} \frac{\partial H'(t)}{\partial x} + \Delta_{\tilde{u}(t)} f'(t) \bar{\Psi}(t) \right] \cdot \left(\int_{\theta}^t B(x^0(s), y^0(s)) ds \right) dt + o(\varepsilon^2). \quad (2.16)$$

Таким образом, имеем оценку:

$$-\frac{1}{2} \varepsilon^2 \beta - o(\varepsilon^2) = -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \beta + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right). \quad (2.17)$$

Величина β не зависит от ε и положительна, а также имеем:

$$\frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \text{ если } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Уменьшим ε настолько, чтобы выполнялось неравенство:

$$\frac{1}{2} \beta + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} > 0.$$

Тогда из последнего равенства с учетом того, что $\beta > 0$ следует неравенство $\Delta_{\theta v} J(u^0) < 0$, тогда получим, что управления $u^0(t)$, $t \in T$ не является оптимальным. Значит, получили противоречие.

Теорема доказана.

Заключение

В данной работе для задач управления в классе дискретных управляющих воздействий с переменным запаздыванием по состоянию:

- проведен обзор литературы по исследуемой теме.
- выведена формула приращения второго порядка для рассматриваемой задачи;
- доказан дискретный принцип максимума для задачи оптимального управления системы с переменным запаздыванием в классе дискретных управлений со специальной правой частью;
- доказано необходимое условие оптимальности особых управлений второго для поставленной задачи.

Литература

1. Математическая теория оптимальных процессов. 4-е изд., стереотипное Л.С. Понтрягин и др. М.: Наука, 1983. С. 393.
2. Альсевич В. В. Оптимизация динамических систем с запаздываниями. Минск: БГУ, 20.
3. Альсевич В.В. Условия оптимальности для систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий // XIX междунар. научн. конф. по дифференц. уравн-ям (Еругинские чтения): матер. междунар. научной конф., Могилев, 14–17 мая 2019 г. Ч. 1., Минск: ин-т математики НАН Беларуси, 2019. С. 102–104.
4. Альсевич В.В., Корзун С.Ю. Условия оптимальности особых управлений в классе дискретных управляющих воздействий // «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 100-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: материалы междунар. научн. конф., Минск, 24–29 сент. 2018 г. Минск: издат. центр БГУ, 2018. С. 58–59.
5. Габасов Р., Альсевич В.В., Русакова Д.В. Оптимизация непрерывных динамических систем с запаздыванием в классе дискретных управляющих воздействий // междунар. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация» к 95-летию со дня рожд. акад. Е.А. Барбашина: тез. докл., Минск, 1–5 окт. 2013 г. Минск: издат. центр БГУ, 2013. С. 103–105. 5. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова Особые оптимальные управления: пособие – Москва: «Наука», С. 1973.-256.
6. Методы оптимизации: пособие / Р. Габасов и др. Минск: Четыре четверти, 2011. С. 472.
7. Альсевич В. В., Цитович П. В. Необходимые условия оптимальности особых дискретных управлений для систем с переменным запаздыванием // Международная математическая конференция «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям», посвященная 100-летию со дня рождения профессора Ю. С. Богданова: материалы Междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. – Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2021. С. 127–129.