MATHCAD В КУРСЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Кремень Е. В., Кремень Ю. А., Расолько Г. А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: kremenev@bsu.by, kremen@bsu.by, rasolka@bsu.by

В 2019 году вышло издание «Численные методы. Практикум в MathCad» [1]. Данное учебное пособие подготовлено в соответствии с программой курса «Численные методы» на механико-математическом факультете БГУ и отражает имеющийся в этой области опыт в проведении вычислительного практикума и лабораторных занятий по дисциплине. Пособие будет полезно студентам физико-математических специальностей университетов, а также широкому кругу специалистов, применяющих компьютеры при решении научно-технических задач.

Цель данного практикума – изучение методов решения задач вычислительной математики и закрепление полученных знаний путём выполнения контролирующих заданий. В пособие включены традиционные разделы курса, а именно: элементы теории погрешностей, приближение функций, численное интегрирование, численное решение нелинейных уравнений и систем уравнений, численные методы линейной алгебры, численные методы ОДУ, численное решение интегральных уравнений, а также краткий справочник пакета MathCad.

Каждая тема включает теоретический материал, примеры реализации алгоритмов и расчетные и (или) теоретические задачи. Не ставилось целью включить в пособие теоретические данные по темам в полном объеме, но авторы, по возможности, старались привести ключевые моменты, представить механизм вывода методов, особенно в тех случаях, когда их можно успешно использовать при апробации алгоритмов или проведении самостоятельных исследований. Для закрепления теории в каждой теме имеется набор заданий. Часть из них была специально подобрана таким образом, чтобы выполнение задач вручную было бы достаточно громоздко и трудоемко, но в тоже время могло бы быть просто и эффективно выполнено при помощи систем компьютерной математики.

Первый раздел пособия посвящен теории погрешностей. В нем не только рассмотрены различные виды погрешностей, но наглядно показано на примере графа вычислительного процесса как легко определить вклад любой ошибки, возникшей в процессе вычислений, в общую ошибку. Приведен материал по представлению вещественных чисел в компьютере, что позволяет студентам составить обоснованное представление как накапливается погрешность, что может повлиять на величину ошибки и т.д. Для этого традиционно теоретического раздела курса приведены примеры, решение которых выполнено в MathCad. Не достаточно просто получить результаты, не менее важно научить информативно представлять и правильно интерпретировать их. Проиллюстрируем сказанное на неустойчивых задачах, сохраняя нумерацию из пособия.

Пример 1.7. (Пример Уилкинсона). Многочлен $P_{20}(x)=\prod_{i=1}^{20}(x-i)\equiv x^{20}-210x^{19}+...+20!$ имеет 20 хорошо отделимых корней $x_1=1,\ x_2=2,\ \dots,\ x_{20}=20.$

Предположим, что только в одном коэффициенте, а именно, при x^{19} сделана ошибка порядка 10^{-7}: вместо -210 в развёрнутый вид многочлена $P_{20}(x)$ подставлено число $-(210+10^{-7})$. Найти корни возмущённого многочлена.

Решение. Используя стандартную функцию *Solve* пакета MathCad легко получить, что малое возмущение, сопоставимое с точностью представления чисел типа *float* в C++ или *single* в *Pascal*, всего лишь в одном коэффициенте качественно изменило набор корней данного многочлена: половина из них перестала быть действительными.

$$P20(x) := \prod_{i=1}^{20} (x-i) \text{ expand} \rightarrow x^{20} - 210\cdot x^{19} + 20615\cdot x^{18} - 1256850\cdot x^{17} + 53327946\cdot x^{1}$$

$$\varepsilon := 10^{-7}$$

$$P20\varepsilon(x) := P20(x) + \varepsilon\cdot x^{19}$$

$$P20\varepsilon(x) \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 20.421950736128862539 - 0.99920096301467263026i \\ 20.421950736128862539 + 0.99920096301467263026i \\ 18.157194069462876092 - 2.4702001696684093328i \\ 18.157194069462876092 + 2.4702001696684093328i \\ 15.314745238025578287 - 2.6986234741794991425i \\ 15.314745238025578287 + 2.6986234741794991425i \\ 12.846211191858680184 - 2.0621808696504566696i \\ 12.846211191858680184 + 2.0621808696504566696i \\ 10.921250266389798514 - 1.1022433306161360392i \\ 10.921250266389798514 + 1.1022433306161360392i \\ 9.5709552724650150 54 \\ 9.1119625132871649535 \\ 7.9941304081491038352 \\ 7.0002544665135506656 \\ 5.9999941752981573736 \\ 5.000000060774215633 \\ 3.9999999997810378794 \\ 3.0000000000001633824 \\ 1.9999999999999999918 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

Пример 1.8. Линейная система $\begin{cases} x + 10y = 11, \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$ имеет единственное решение $x=1$, $y=1$. Допустив абсолютную погрешность в $0,01$ в правой части первого уравнения, получим возмущённую систему $\begin{cases} x + 10y = 11,01, \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$ с единственным решением $x = 11,01,\quad y = 0,$ которое значительно отличается от решения исходной системы. Проанализируем полученные результаты.

Given

$$x + 10\cdot y = 11$$

$$100\cdot x + 1001\cdot y = 1101 \qquad \mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon := 0.01$ Given

$$x + 10\cdot y = 11 + \varepsilon$$

$$100\cdot x + 1001\cdot y = 1101 \qquad \mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 11.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon := 0.005$ Given

$$x + 10\cdot y = 11 + \varepsilon$$

$$100\cdot x + 1001\cdot y = 1101 \qquad \mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 6.005 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$\varepsilon := 0.00001$ Given

$$x + 10\cdot y = 11 + \varepsilon$$

$$100\cdot x + 1001\cdot y = 1101 \qquad \mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 1.01001 \\ 0.999 \end{pmatrix}$$

Обратим еще внимание на материалы к теме «Численное решение интегральных уравнений». Тема решения интегральных уравнений, а тем более сингулярных интегральных уравнений, традиционно не имеет широкого представления в учебных практикумах. Кроме этого, в системах компьютерной математики до сих пор нет встроенных методов для решения таких уравнений. В пособии представлены основные сведения, необходимые для изучения и практического применения численного решения интегральных уравнений, построения численных методов и вычислительных технологий на их основе. Это также можно считать одной из основных отличий пособия от традиционных.

Поскольку с каждым годом расширяется круг инструментов, которые можно использовать при решении задач вычислительной математики, то и создание пособий для обучения студентов в которых бы освящались вопросы использования такого инструментария является актуальным.

Уже давно повсеместной практикой при проведении расчетов стало использование различных систем компьютерной математики, таких как MATLAB, Mathcad, Maple, Mathematica и др. Они представляют собой универсальные продукты с гибкими возможностями, включающих множество математических понятий и обладающие богатым набором методов для решения общих математических и научно-технических задач. Численные методы – это именно та дисциплина, в рамках которой использование систем компьютерной математики не просто уместно, но и необходимо.

Maple, MATLAB и Mathematica – это языки программирования, гибкие и мощные, но трудные в использовании и требующие длительного времени на изучение. Поэтому, в отличие от MathCad, пользовательский интерфейс их сложен, в нем легко допускать ошибки, которые вынуждают проверять и отлаживать весь код. Программирование не визуально и не интерактивно.

Обучение с использованием MathCad может быть эффективно задействовано в ВУЗах любого профиля. Интерфейс Mathcad очень простой, решение математических задач дается с помощью привычных математических формул и общепринятых знакомых символов. Такое же представление имеют результаты вычислений. Mathcad очень хорошо подходит для выполнения технических расчетов и является мировым стандартом для инженерных вычислений, поэтому данное пособие будет интересно студентам естественно-научных и технических специальностей. Кроме того, благодаря тем же свойствам, Mathcad идеально подходит для эффективного использования в сфере образования. И с этой точки зрения пособие будет интересно как студентам, изучающим численные методы, так и преподавателям этой дисциплины.

Апробация заданий, приведенных в практикуме, показала, что у студентов вырабатывается стойкий навык к использованию специализированных математических систем, появляется уверенность в своих силах при работе с новейшими компьютерными технологиями, формируется более глубокий интерес к предмету численных методов и более широкий взгляд на изучаемые математические проблемы в целом.

Литература

1. Кремень, Е.В. Численные методы. Практикум в Mathcad: учеб. пособие / Е. В. Кремень, Ю. А. Кремень, Г. А. Расолько. – Минск : Вышэйшая школа, 2019. – 255 с.