

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ СИЛЬНОТОЧНЫХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В НЕОДНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Сытова С. Н.

Институт ядерных проблем БГУ, Минск, Беларусь, e-mail: sytova@inp.bsu.by

Теоретические и экспериментальные исследования каждого нового типа электронных вакуумных приборов (усилителей и генераторов), функционирующих в диапазонах спектра от микроволнового до рентгеновского [1, 2], имеют огромное значение для науки и практики. В [3] приведен краткий обзор физических явлений в таких приборах – лампах и генераторах бегущей волны (ЛОВ), обратной волны (ЛБВ), лазерах и мазерах на свободных электронах (ЛСЭ и МСЭ) с демонстрацией многообразия таких приборов при их очевидной общности в используемых физических принципах, а также сложной нелинейной динамики их функционирования.

В данной работе представлены некоторые результаты математического моделирования сложной нелинейной динамики излучения сильноточных пучков заряженных частиц в неоднородных пространственно-периодических структурах, получаемой в новом типе вакуумных электронных приборов – объемных лазерах на свободных электронах (ОЛСЭ). Особое внимание уделено математической модели ОЛСЭ с учетом дисперсии электромагнитных волн в системе.

ОЛСЭ, физические принципы функционирования которых предложены и развиты в [4–6], а экспериментальные исследования начаты в [7–9], являются «близкими родственниками» указанных выше вакуумных электронных приборов, но и имеют принципиальные отличия. Ни в одном из указанных выше электронных приборов не используются принципы многоволновой динамической дифракции (в понимании кристаллооптики [10]) в объемных резонаторах с двух- и трехмерными дифракционными решетками. Возможность использования широкого в поперечном сечении (не плоского или трубчатого – как в других приборах [1]) пучка заряженных частиц позволяет распределить взаимодействие по большому объему и снизить ограничения на мощность в резонаторе.

В ОЛСЭ для различных частотных диапазонов (от рентгеновского до микроволнового) используются резонаторы с расстояниями между плоскостями, сравнимыми с длиной волны. Например, в рентгеновском диапазоне используются естественные кристаллы. Величина пространственного периода определяется периодом кристаллической решетки и испускаемое излучение имеет длину, сравнимую с межатомными расстояниями, т. е. – в рентгеновском диапазоне [5]. В случае СВЧ может использоваться сеточный резонатор, состоящий из периодически натянутых в волноводе металлических нитей или фольг [6, 8, 9].

Линейный режим работы ОЛСЭ изучен достаточно хорошо [4–6], но он быстро сменяется нелинейной стадией. Математические модели, описывающие нелинейную стадию работы ОЛСЭ, также как других вакуумных электронных приборов, представляют собой системы многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Понятно, что их для решения должны быть

использованы методы математического моделирования, поскольку аналитически получить решения таких систем уравнений невозможно.

Для описания электромагнитных полей в теоретической модели ОЛСЭ, так же как и любого вышеперечисленного электронного прибора, используются уравнения Максвелла в основном с использованием приближения медленно меняющихся амплитуд (англ. slowly varying envelope approximation – SVEA), впервые предложенного в [11] при построении теории мазеров.

В этом случае решение уравнений Максвелла для электрического поля ищется в виде суммы по N сильным электромагнитным волнам, формируемым в системе:

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^N E_j e^{i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1)$$

где E_j – амплитуды электромагнитных волн, $\mathbf{k}_j$ – соответствующие им волновые векторы, ω – частота, i – мнимая единица.

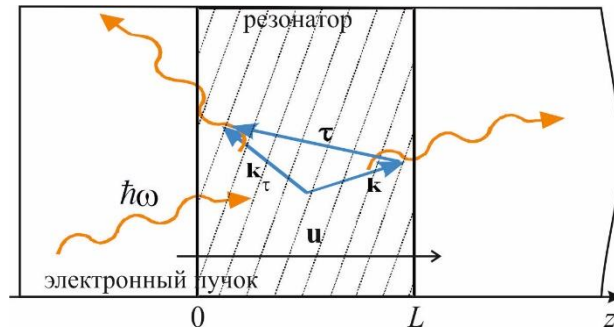


Рис. 1. Схема двухволнового ОЛСЭ в геометрии Брэгга

Рассмотрим простейшую математическую модель двухволнового ОЛСЭ в т. н. геометрии Брэгга (см. рис. 1). Пусть электронный пучок со скоростью $\mathbf{u}$ «падает» под некоторым углом на полубесконечную пространственно-периодическую мишень (резонатор) толщиной L . Одновременно на мишень падает плоская электромагнитная волна с частотой ω и волновым вектором $\mathbf{k}$. Если эта волна находится в условиях дифракции $2\mathbf{k}\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}^2 \approx 0$ [4, 10], то в резонаторе образуется дифрагированная волна с волновым вектором $\mathbf{k}_\tau = \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – вектор обратной решетки мишени [10].

В случае моделирования такого двухволнового ОЛСЭ из уравнений Максвелла с использованием (1) при $N = 2$ получается система уравнений для двух сильных электромагнитных волн – проходящей и дифрагированной, образующихся в системе вследствие динамической дифракции, с амплитудами E_1 и E_2 .

Как показано в [6], дисперсия электромагнитных волн в сеточном резонаторе ОЛСЭ, выражающаяся в связи диэлектрической проницаемости резонатора и частоты излучения ω , зависит от материала, толщины нитей, периода их натяжения и других факторов и должна учитываться при моделировании ОЛСЭ. Система без учета дисперсии получена в [12]. Система с учетом дисперсии, полученная в [13], может быть записана в обобщенном виде без уточнения коэффициентов в виде (2). Здесь коэффициенты $a_{ij}, i, j = 1, 2$, описывают дисперсию волн и могут варьироваться от пренебрежимо малых значений до величин, сравнимых с единицей. В последнем случае, очевидно, что дисперсией пренебрегать нельзя.

$$\begin{aligned}
(1+a_{11})\frac{\partial E_1}{\partial t} + a_{12}\frac{\partial E_2}{\partial t} + b_1\frac{\partial E_1}{\partial z} + c_{11}E_1 + c_{12}E_2 &= F, \\
a_{21}\frac{\partial E_1}{\partial t} + (1+a_{22})\frac{\partial E_2}{\partial t} + b_2\frac{\partial E_2}{\partial z} + c_{21}E_1 + c_{22}E_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
F &= \Phi \int_0^{2\pi} \frac{2\pi-p}{8\pi^2} \left(e^{-i\theta(t,z,p)} + e^{-i\theta(t,z,-p)} \right) dp, \quad E_1|_{z=0} = E_{10}, \quad E_2|_{z=L} = E_{20}, \\
\frac{\partial^2 \theta(t,z,p)}{\partial z^2} &= \Psi \left(k_z - \frac{\partial \theta(t,z,p)}{\partial z} \right)^3 \operatorname{Re} (E_1(t-z/u, z)) e^{i\theta(t,z,p)}, \\
\theta(t,0,p) &= p, \quad \frac{\partial \theta(t,0,p)}{\partial z} = k_z - \omega/u, \quad t > 0, \quad z \in [0, L], \quad p \in [-2\pi, 2\pi].
\end{aligned} \tag{3}$$

В (3) динамика электронного пучка моделируется усреднением по фазам влета электронов в область взаимодействия $\theta(t, z, p)$. Этот метод [1] хорошо известен и широко применяется для расчета ЛБВ, ЛОВ, ЛСЭ и других электронных приборов. Но в отличие от [1], где рассматривается электронная динамика, определяемая только временем влета электрона в резонатор, в (3) учтено влияние на динамику электрона пространственной поперечной точки его влета в область взаимодействия при $z = 0$. Именно благодаря усреднению по двум фазам – моменту влета и поперечной координате влета электронов – в ОЛСЭ удалось промоделировать тонкие неоднородные эффекты в области вырождения корней дисперсионного уравнения и при синхронизме нескольких мод с пучком. Другие модели электронного пучка ОЛСЭ в гидродинамическом приближении и в виде функций распределения рассматривались в [14] и [15].

Разностные схемы решения (2)–(3) без учета дисперсии предложены в [12]. Ниже при моделировании использовалась схема решения (3) из [12].

Перепишем систему (2) в матричном виде относительно вектора амплитуд электромагнитного поля $\mathbf{E} = (E_1, E_2)^T$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \mathbf{C} \mathbf{E} &= \mathbf{F}, \\
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 1+a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и преобразуем ее:} \\
\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \mathbf{C} \mathbf{E} + \mathbf{G} \mathbf{E} &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F},
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathbf{D} = (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{B}$, $\mathbf{G} = (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I})\mathbf{C}$, $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Введем в области

$$\Omega \cap \Omega_t = \{0 \leq z \leq L\} \cup \{t > 0\}$$

равномерные сетки:

$$\omega_t = \{t_l = lh_t, l = 0, 1, \dots\}, \quad \omega_z = \{z_m = mh_z, m = 0, 1, \dots, M, Mh_z = L\},$$

Запишем разностную схему решения (4) на этих сетках с использованием идей многокомпонентного метода переменных направлений (ММПН), предложенных для систем гиперболических уравнений в [14, 15].

Первоначально схемы ММПН были предложены в [16], а именно – двухслойные и трехслойные схемы для одного уравнения и системы дифференциальных уравнений в частных производных для прямоугольных областей. Также там были указаны принципы перенесения результатов на криволинейные области. В ММПН каждое из разностных уравнений аппроксимирует исходную дифференциальную задачу, а вычисления по схеме осуществляются последовательно по каждому пространственному направлению. В каждой точке пространства находятся несколько значений (компонент) приближенного решения исходной дифференциальной задачи. Метод близок к предложенной первоначальной трактовке метода переменных направлений [17], но обладает рядом важных преимуществ, среди которых – абсолютная устойчивость без стабилизирующих поправок для задач любой размерности, отсутствие требования коммутуруемости пространственных операторов для выполнения условий устойчивости, эффективность при решении многомерных задач в областях со сложной геометрией.

Введем векторы $\mathbf{E}^1$ и $\mathbf{E}^2$ – две разностные компоненты вектора амплитуд полей $\mathbf{E}$. В качестве результата будет браться их полусумма. Модифицируем общепринятые обозначения записи разностных производных [17]. Ниже знак “ $\sim$ ” означает соответствующие направлению распространения волн левые и правые разностные производные, а также полусумму в соседних узлах разностной сетки по z для слагаемых $\mathbf{CE}$ и $\mathbf{GE}$. Тогда можно записать:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t^1 + \mathbf{B}\hat{\mathbf{E}}_z^1 + \mathbf{D}\mathbf{E}_z^2 + \mathbf{C}\hat{\mathbf{E}}^1 + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}^2 &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}, \\ \mathbf{E}_t^2 + \mathbf{B}\hat{\mathbf{E}}_z^1 + \mathbf{D}\mathbf{E}_z^2 + \mathbf{C}\hat{\mathbf{E}}^1 + \mathbf{G}\tilde{\mathbf{E}}^2 &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F},\end{aligned}\tag{5}$$

(5) является схемой полной аппроксимации. На достаточно гладких решениях она имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству.

В (5) используются компоненты $\mathbf{E}^1$ и $\mathbf{E}^2$ не по различным пространственным направлениям, а по физическим процессам. Члены уравнения $\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$ и $\mathbf{CE}$ описывают «чистую» дифракции без дисперсии в системе. Члены $\mathbf{D}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z}$ и $\mathbf{GE}$ «отвечают» за дисперсию в системе. Понятно, что в случае отсутствия дисперсии ($a_{ij} = 0, \quad i, j = 1, 2$) векторы $\mathbf{E}^1$ и $\mathbf{E}^2$ будут совпадать.

На основе предложенных математических моделей ОЛСЭ и разностных методов их решения разработан комплекс программ VOLC (**V**olume **C**ode) [18], предназначенный для экспресс-моделирования работы различных типов ОЛСЭ, в том числе экспериментальных физических установок ОЛСЭ НИИ ЯП БГУ [8, 9]. VOLC позволяет моделировать сложную трехмерную динамику электронного пучка и распространение электромагнитных волн в объемном резонаторе ОЛСЭ. Программа всесторонне протестирована, в том числе путем сравнения численных результатов моделирования и известных аналитических решений. Полученные численные результаты имеют разумное согласие с теоретическими и экспериментальными физическими результатами.

С помощью VOLC, в частности, исследованы различные пороги генерации для двух- и трехволновых ОЛСЭ, в том числе для экспериментальных установок ОЛСЭ; динамика разных двух- и трехволновых геометрий, изучено влияние внешних зеркал,

проведено сравнение эффективности генерации одномерных и неомномерных геометрий и др. [12, 13, 18, 19]. Математическое моделирование подтвердило все основные физические закономерности и принципы работы ОЛСЭ, а также что для эффективной генерации существует оптимальный набор параметров системы.

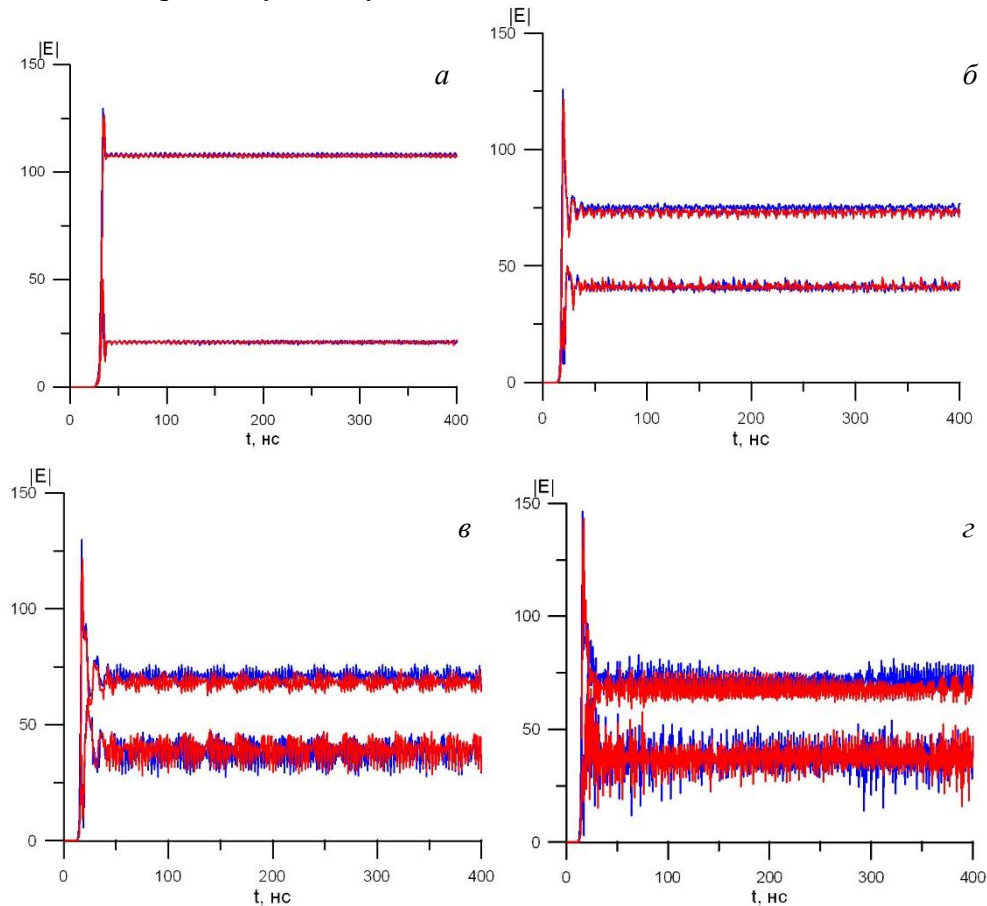


Рис. 2. Временная зависимость проходящей (нижние кривые) и дифрагированной (верхние кривые) волн для толщины нитей резонатора 0.02 см (а), 0.04 см (б), 0.06 см (в), 0.08 см (г). Красные кривые – моделирование без учета дисперсии, синие кривые – с учетом дисперсии

На рис. 2 даны некоторые результаты моделирования ОЛСЭ с учетом дисперсии для различной толщины нитей резонатора установки [9]. Здесь на каждой картинке изображена временная зависимость для модуля амплитуды проходящей (нижние кривые) и дифрагированной (верхние кривые) волн для толщины нитей резонатора $d = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08$ см и соответствующим им значений $a_{11} = 0.058, 0.087, 0.115, 0.145$. На рис. 2 красные кривые – моделирование без учета дисперсии, синие – с учетом дисперсии. Видно, что хотя в данном случае тип динамического решения сохраняется, при больших d дисперсию учитывать следует. Вероятно, что в некоторых случаях дисперсия может привести к кардинальной смене типа решения.

В [12, 18, 20] впервые объемные лазеры на свободных электронах исследованы с точки зрения нелинейной динамики, что важно для повышения эффективности генераторов и источников излучения в различных спектральных диапазонах. Показано, что ОЛСЭ является динамической системой с особенностями нелинейной динамики

генерации, обусловленными нелокальной природой взаимодействия пучка электронов с электромагнитным полем в условиях дифракции.

В процессе исследования хаотической природы ОЛСЭ изучены его пространственно-временная и фазовая динамика, промоделированы различные динамические режимы работы со сложной их трансформацией. Исследованы точки бифуркаций, соответствующие переходам между различными режимами генерации для различных схем ОЛСЭ, зависимость распределения хаотических режимов от положения точек бифуркаций в зависимости от геометрии ОРОС и других параметров ОЛСЭ, способы управления хаосом в различных схемах ОЛСЭ [21, 22].

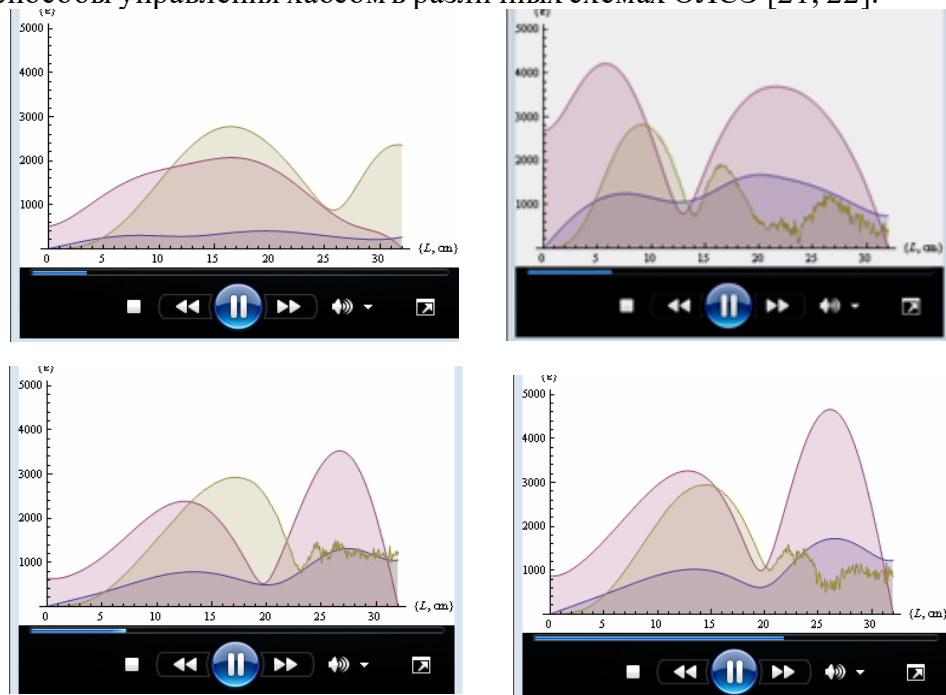


Рис. 3. Кадры «видео» пространственно-временной динамики ОЛСЭ. Голубая кривая демонстрирует проходящую волну, розовая кривая – дифрагированную, желтая – правую часть системы уравнений (2), описывающую влияние пучка электронов

Процесс динамической дифракции и прохождения пучка электронов через резонатор проиллюстрирован видео, четыре кадра которого приведены на рис. 3. Момент времени изображен линией под графиком. Все кривые быстро нарастают и затем динамически «дышат» в пространстве и времени, перераспределяя свои амплитуды. Видно, что кривая пучка имеет в первой половине резонатора большие «горбы». Это означает, что электроны пучка начинают эффективно отдавать энергию электромагнитному полю. Ближе к выходу из резонатора значения амплитуд пучка уменьшаются. Это означает, что электроны излучают меньше и на них действуют физические силы, формирующие «паразитные» моды. Кривая пучка в отличие от кривых амплитуд волн начиная с середины резонатора теряет гладкость. Однако, эти «паразитные» частоты вследствие динамической дифракции и объемной распределенной обратной связи внутри резонатора не передаются электромагнитного волнам, что полностью соответствует теории ОЛСЭ [4 – 6].

Проведенное исследование основных свойств ОЛСЭ как хаотической динамической системы важно для реализации в будущих экспериментах способов управления хаосом и выбора более оптимальных режимов работы ОЛСЭ.

Литература

1. Трубецков, Д. И. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: в 2 т. / Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2003, 2004. – 496 с. (Т. 1), 648 с. (Т. 2).
2. Маршалл, Т. Лазеры на свободных электронах / Т. Маршалл. – М.: Мир, 1987. – 240 с.
3. Сытова, С. Н. Нелинейная динамика излучения сильнооточных пучков заряженных частиц в пространственно-периодических структурах / С. Н. Сытова // Журнал Белорусского государственного университета. Физика. – 2021, №1. – С. 62–72.
4. Baryshevsky, V. G. Parametric beam instability of relativistic charged particles in a crystal / V. G. Baryshevsky, I. D. Feranchuk // Physics Letters A. – 1984. – Vol. 102. – P. 141–144.
5. Baryshevsky, V. G. Parametric (quasi-Cerenkov) X-ray free electron lasers / V. G. Baryshevsky, K. G. Batrakov, I. Ya. Dubovskaya // J. Physics D: Appl. Physics. – 1991. – Vol. 24. – P. 1250–1257.
6. Baryshevsky, V. G. Spontaneous and induced parametric and Smith-Purcell radiation from electrons moving in a photonic crystal built from the metallic threads / V. G. Baryshevsky, A. A. Gurinovich // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res B. – 2006. – Vol. B252. – P. 92–101.
7. Baryshevsky, V. G. First lasing of a volume FEL (VFEL) at a length range $\lambda \sim 4\text{--}6\text{ mm}$ / V. G. Baryshevsky [et al.] // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A. – 2002. – Vol. A483. – P. 21–24.
8. Baryshevsky, V. G. Experimental Study of Volume Free Electron Laser using a "grid" photonic crystal with variable period / V. G. Baryshevsky [et al.] // Proc. 29th Int. Free Electron Laser Conference: Proceedings of FEL2007, Novosibirsk, 2007. – P. 496–498.
9. Baryshevsky, V. G. Volume free electron laser with a "grid" photonic crystal with variable period: theory and experiment / V. G. Baryshevsky [et al.] // Proc. 31st Int. Free Electron Laser Conference. – Liverpool, 2009. – P. 134–137.
10. Пинскер, З. Г. Рентгеновская кристаллооптика / З. Г. Пинскер – М.: Наука, 1982. – 391 с.
11. Arecchi, F. Theory of optical maser amplifiers / F. Arecchi, R. Bonifacio // IEEE Journal of Quantum Electronics. – 1965. – Vol. 1. – P. 169–178.
12. Батраков, К. Г. Моделирование лазеров на свободных электронах / К. Г. Батраков, С. Н. Сытова // Журнал выч. математики и мат. физики. – 2005. – Т. 45, № 4. – С. 690–700.
13. Сытова, С. Н. Модели объемных лазеров на свободных электронах / С. Н. Сытова // Известия вузов. ПНД. – 2012. – Т. 20, № 6. – С. 124–135.
14. Абрашин, В. Н. Нелинейная стадия развития черенковской неустойчивости релятивистского электронного пучка / В. Н. Абрашин, А. О. Грубич, С. Н. Сытова // Математическое моделирование. – 1991. – Т. 3, № 8. – С. 21–29.
15. Сытова, С. Н. Численный метод решения гиперболической системы с особенностями / С. Н. Сытова // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, № 7. – С. 986–989.
16. Абрашин, В. Н. Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики. I / В. Н. Абрашин // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 314–323.
17. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 614 с.
18. Batrakov, K. Mathematical modeling of multiwave Volume Free Electron Laser: basic principles and numerical experiments / K. Batrakov, S. Sytova // Mathematical modelling and analysis. – 2006. – Vol. 11, No 1. – P. 13–22.
19. Барышевский, В. Г. Радиационные процессы, радиационная неустойчивость и хаос в излучении, образованном релятивистскими пучками, движущимися в трехмерных (двумерных) пространственно-периодических структурах (естественных и фотонных кристаллах) / В. Г. Барышевский, С. Н. Сытова // Известия вузов. ПНД. – 2013. – Т. 21, № 6. – С. 25–48.
20. Sytova, S. Volume Free Electron Laser (VFEL) as a Dynamical System / S. Sytova // Nonlin. Phen. Compl. Syst. – 2007. – Vol. 10, No 3. – P. 297–302.
21. Сытова, С. Н. Хаос в объемных лазерах на свободных электронах (ОЛСЭ) / С. Н. Сытова // Известия вузов. ПНД. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 93–111.
22. Сытова, С. Н. Влияние внешних условий на хаос в объемных лазерах на свободных электронах / С. Н. Сытова // Доклады НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 1. – С. 47–52.