

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО СЛАБО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Шешко С. М.

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,
e-mail: SheshkaSM@bsu.by*

В настоящей работе предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения с логарифмическим ядром вида [1, стр. 58, 59]

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \ln|t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) K(x,t) dt = f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

в классе функций $h(-1,1)$ по Мусхелишвили методом ортогональных многочленов. Здесь $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гельдера H , $\varphi(x)$ – искомая функция. Класс функций $h(-1,1)$ – класс ограниченных в окрестности точек $x = \pm 1$ функций [2, стр. 31].

Построенные согласно методике [3, 4] спектральные схемы численного решения уравнения (1), получены на основе известных спектральных соотношений для слабо сингулярного интеграла:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x| dt = \alpha_k T_k(x), \quad \alpha_0 = -\ln 2, \quad \alpha_k = -\frac{1}{k}, \quad k > 0,$$

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x),$$

и квазиспектральных соотношений для слабо сингулярных интегралов, позволяющих получить точные аналитические выражения для интегралов, не прибегая, в отличие от методики [1], к квадратурным формулам. Здесь и далее $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Имеет место следующее

Утверждение. Для $|x| < 1$ имеет место равенства:

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} T_k(t) \ln|t-x| dt =$$

$$= \begin{cases} -\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) + \frac{1}{8} U_2(x), & k=0, \\ -\frac{1}{6} U_1(x) + \frac{1}{24} U_3(x), & k=1, \\ \left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{1}{8}\right) U_0(x) - \frac{5}{32} U_2(x) + \frac{1}{32} U_4(x), & k=2, \\ -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)} + \frac{3k-4}{8k(k-2)} U_{k-2}(x) - \frac{3k+4}{8k(k+2)} U_k(x) + \frac{1}{8(k+2)} U_{k+2}(x), & k \geq 3. \end{cases}$$

При построении вычислительных схем используются интерполяционные многочлены для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода [5] вида

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j^n T_j(x), \quad (2)$$

где

$$f_0^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k), \quad f_j^n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{1, n}, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n},$$

или вида

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n f_j U_j(x), \quad (3)$$

где

$$f_j = G_j - G_{j+2}, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1} = G_{n-1}, \quad f_n = G_n, \\ G_j = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n}, \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

На основании (2) и (3) получен интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x, t)$ функции двух переменных $K(x, t)$ в виде разложения по многочленам Чебышева первого и второго рода:

$$K_{n,n}(x, t) = \sum_{m=0}^n T_m(x) \sum_{j=0}^n k_{m,j} U_j(t), \quad (4)$$

где

$$k_{m,j} = \frac{\delta_m}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^n T_m(x_l) \sum_{r=0}^n K(x_l, x_r) (T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)), \\ \theta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad \delta_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0, \end{cases} \quad x_k = \cos \frac{2k+1}{2n+2} \pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Приближенное решение уравнения (1) в заданном классе функций разыскивается как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\varphi_n(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \ln |t-x| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) K_{n,n}(x, t) dt = F_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad (5)$$

где $\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} v_n(x)$, $K_{n,n}(x, t)$ – интерполяционный многочлен (4) функции $K(x, t)$ степени n по обоим переменным, $F_n(x)$ – некоторая функция из класса $C[-1, 1]$, такая, что $F_n(x_j) = f(x_j)$, $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Полагаем далее

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} v_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x), \quad (6)$$

c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, – пока неизвестные постоянные.

Учтя свойство ортогональности многочленов Чебышева в заданном классе и вышеприведенные квазиспектральные соотношения из уравнений (6) получаем уравнение

$$\sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k I_k(x) + \sum_{k=0}^n c_k \sum_{m=0}^n T_m(x) \omega_{m,k} = F_n(x). \quad (7)$$

В качестве внешних узлов x в (7) выберем узлы Чебышева первого рода, а именно, $x_j = \cos \frac{2j+1}{2n+2}$, $j = 0, \dots, n$.

Из (7) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=0}^n c_k A_{j,k} = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n, \quad (8)$$

$$A_{j,k} = \sqrt{1-x_j^2} T_k(x_j) + I_k(x_j) + \sum_{m=0}^n T_m(x_j) \omega_{m,k},$$

$$\omega_{m,k} = \begin{cases} 0.5 k_{m,k}, & k = 0, \\ 0.25 k_{m,k}, & k > 0. \end{cases}$$

Решив систему (8) относительно неизвестных c_k , $k = \overline{0, n}$, приближенное решение уравнения (1) получаем по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{k=0}^n c_k T_k(x). \quad (9)$$

Предложенная схема протестированы на примере решения модельной задачи при

$$k(x, t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)},$$

$$f(x) = 2x\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3}) \frac{1}{x+2}.$$

Известно, что решением уравнения в данном случае является функция

$$\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Как показывают численные расчеты, предложенный алгоритм при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивает высокую точность приближенного решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью.

Литература

1. Панасюк, В.В., Саврук, М.П., Назарчук, З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984.
2. Мухелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. Расолько Г.А., Шешко С. М., Шешко М. А. Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Журнал дифференциальные уравнения, 2019, том 55, № 9, с. 1285-1292.
4. Расолько Г.А., Шешко С.М. Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020; 2: 10 – 20.
5. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.