О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Расолько Г. А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: rasolka@bsu.by

В работе [1, стр. 58, 59] рассматривается квадратурный метод приближенного решения сингулярного интегрального уравнения с логарифмическим ядром

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\ln|t-x|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)K(x,t)dt=f(x),\ -1<x<1. \tag{1}$$

Здесь $K(x,t)$ и $f(x)$ – известные функции из класса Гельдера H, $\varphi(x)$ – искомая функция.

В данной работе предлагаются алгоритмы численного решения уравнения (1) в разных классах функций по Мусхелишвили [2, стр. 31] методом ортогональных многочленов, основной идеей которого является использование спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов.

Мы говорим, что функция $\psi(x)\in h(0)$, если на отрезке $[-1+\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2]$ $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, она удовлетворяет условию Гельдера, а в окрестности точек ±1 допускает интегрируемую особенность. Класс функций $h(-1,1)$ – класс ограниченных в окрестности точек $x=\pm1$ функций.

Построенные согласно методике [3 – 6] спектральные схемы численного решения уравнения (1), в отличие от [1], получены на основе известных спектральных соотношений для слабо сингулярного интеграла:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t-x|\,dt=\alpha_k T_k(x),\ \alpha_0=-\ln 2,\ \alpha_k=-\frac{1}{k},\ k>0,\ T_k(x)=\cos(k\arccos x),$$

и квазиспектральных соотношений для слабо сингулярных интегралов, позволяющих получить точные аналитические выражения для интегралов, не прибегая к квадратурным формулам. Здесь и далее $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышёва первого и второго рода соответственно.

Имеет место

Утверждение. Для $|x|<1$ выполняются следующие квазиспектральные соотношения:

$$L_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}T_k(t)\ln|t-x|\,dt=\begin{cases}-\ln 2\,T_0(x)+T_1(x), & k=0,\\ \dfrac{\ln 2}{2}T_0(x)-T_1(x)+\dfrac{1}{4}T_2(x), & k=1,\\ \dfrac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)}-\dfrac{T_k(x)}{k}+\dfrac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}, & k\geq 2;\end{cases}$$

$$M_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}T_k(t)\ln|t-x|\,dt=\begin{cases}-\ln 2\,T_0(x)-T_1(x), & k=0,\\ -\frac{\ln 2}{2}T_0(x)-T_1(x)-\frac{1}{4}T_2(x), & k=1,\\ -\frac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)}-\frac{T_k(x)}{k}-\frac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}, & k\ge 2;\end{cases}$$

$$J_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_k(t)\ln|t-x|\,dt=\begin{cases}-\frac{\ln 2}{2}T_0(x)+\frac{1}{4}T_2(x), & k=0,\\ -\frac{1}{2k}T_k(x)+\frac{1}{2k+4}T_{k+2}(x), & k\ge 1;\end{cases}$$

$$H_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_k(t)\ln|t-x|\,dt=$$

$$=\begin{cases}-\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)+\frac{1}{8}U_2(x), & k=0,\\ -\frac{1}{6}U_1(x)+\frac{1}{24}U_3(x), & k=1,\\ \left(\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)-\frac{5}{32}U_2(x)+\frac{1}{32}U_4(x), & k=2,\\ -\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)}+\frac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x)-\frac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x)+\frac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x), & k\ge 3.\end{cases}$$

При построении вычислительных схем используются интерполяционные многочлены для функции $f(x)$ по узлам Чебышева первого рода [7] вида

$$f(x)\approx f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j^n T_j(x), \tag{2}$$

где $f_0^n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k),\quad f_j^n=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k),\quad j=\overline{1,n},\quad x_k=\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\quad k=\overline{0,n},$

или вида

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{n} f_j U_j(x), \tag{3}$$

$$f_j=G_j-G_{j+2},\quad j=\overline{0,n-2},\quad f_{n-1}=G_{n-1},\quad f_n=G_n,$$

$$G_j=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)T_j(x_k),\quad j=\overline{0,n},\quad x_k=\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi,\quad k=\overline{0,n}.$$

На основании (2) и (3) построено несколько интерполяционных многочленов функции двух переменных $K(x,t)$.

Приближенное решение уравнения (1) в классе функций $h(0)$ вычисляется как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}v_n(t)\ln|t-x|dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}v_n(t)K_{n,n}(x,t)dt = f_n(x), |x|<1, \qquad (4)$$

где $K_{n,n}(x,t)$ − интерполяционный многочлен функции $K(x,t)$ степени n по обеим переменным, $f_n(x)$ − интерполяционный многочлен (2) функции $f(x)$ степени n,

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}v_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{k=0}^{n}c_kT_k(x).$$

Учитывая свойство ортогональности многочленов Чебышева в заданном классе и вышеприведенные квазиспектральные соотношения, из уравнений (4) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k, $k=\overline{0,n}$.

Аналогично получена вычислительная схема приближенного решения уравнения (1) в классе функций $h(-1,1)$ на основании следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)\ln|t-x|dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)K_{n,n}(x,t)dt = f_{n+2}(x), |x|<1, \qquad (5)$$

где $K_{n,n}(x,t)$ − интерполяционный многочлен функции $K(x,t)$ степени n по обеим переменным, $f_{n+2}(x)$ − интерполяционный многочлен (3) функции $f(x)$ степени $n+2$, $\varphi_n(x)=\sqrt{1-x^2}v_n(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{k=0}^{n}c_kT_k(x)$.

По аналогии с рассмотренным выше подходом, учитывая свойство ортогональности многочленов Чебышева в заданном классе и вышеприведенные квазиспектральные соотношения, из уравнений (5) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k, $k=\overline{0,n}$.

Как показывают численные примеры, предложенные квазиспектральные методы при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивают высокую точность приближенного решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью.

Литература

1. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наук. думка, 1984. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018; 3: 68–74.

2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.

3. Расолько ГА. Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов. Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2018; 3: 68–74.

4. Расолько ГА. К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2019; №1: 58 – 68.

5. Расолько Г.А., Шешко С. М., Шешко М. А. Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Журнал дифференциальные уравнения, 2019, том 55, № 9, с. 1285-1292.

6. Расолько ГА, Шешко СМ. Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. 2020; 2: 10 – 20.

7. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.