О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА С ВАРИАЦИОННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Игнатенко М. В.[1)], Янович Л. А.[2)]

[1)] *Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,*
e-mail: *ignatenkomv@bsu.by*;
[2)] *Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь,*
e-mail: *yanovich@im.bas-net.by*

Пусть X – линейное пространство вещественных функций, определенных на отрезке $[a,b]$ действительной оси $\mathbb{R}$, а $F(x)$ – оператор или функционал, заданный на множестве X. Известно, что первый дифференциал Гато $\delta F[x;h]$ отображения F в точке $x \in X$ по направлению $h \in X$ определяется равенством

$$\delta F[x;h] = \lim_{\lambda\to 0}\frac{F\left(x+\lambda h\right)-F\left(x\right)}{\lambda} = \left.\frac{dF\left(x+\lambda h\right)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}.$$

В частности, если дифференциал $\delta F[x;h]$ допускает представление в виде

$$\delta F[x;h] = \int_a^b a\left(x;t\right)h\left(t\right)dt,$$

где $a\left(x;t\right)$ – некоторая функция, зависящая от $x = x\left(s\right)$ и переменной t, то ее называют [1] вариационной производной первого порядка функционала $F\left(x\right)$ по x в точке t и обозначают символом $\dfrac{\delta F(x)}{\delta x(t)}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение специального вида, содержащее вариационные производные первого и второго порядков искомого функционала $F(x)$:

$$\frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(t)x(s)} - \alpha\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)} + \frac{\alpha^2}{4}F(x) = 0, \tag{1}$$

где α – любая функция, для которой существуют приведенные ниже интегралы.

Теорема. *Общее решение уравнения* (1) *определяется формулой*

$$F(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(t)dt\right)\left\{C_1 + C_2\int_T x(t)dt\right\}, \tag{2}$$

где C_1 и C_2 *– некоторые произвольные функции, например, из пространств* $C(T)$ *или* $L_2(T)$ $(T=[a,b]\subseteq\mathbb{R})$.

Для доказательства теоремы вычислим первый дифференциал Гато $\delta F[x;h]$ в точке x по направлению h $(x,h \in X)$ от функционала вида (2), используя определение:

$$\delta F[x;h] = \int_T\left[\frac{\alpha}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(s)ds\right)\left\{C_1 + C_2\int_T x(s)ds\right\} + C_2\exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(s)ds\right)\right]h(t)dt.$$

Следовательно, вариационная производная первого порядка от этого функционала определяется правилом

$$\frac{\delta F(x)}{\delta x(t)}=\frac{\alpha}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(s)ds\right)\left\{C_1+C_2\int_T x(s)ds\right\}+C_2\exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(s)ds\right).$$

Далее вычислим второй дифференциал Гато и вариационную производную второго порядка от функционала (2). Получим, что

$$\delta^2 F[x;h_1,h_2]=\int_T\int_T \frac{\alpha^2}{4}\exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(u)du\right)\left\{C_1+C_2\int_T x(u)du\right\}h_2(s)h_1(t)dsdt+$$

$$+\int_T\int_T \alpha C_2\exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(u)du\right)h_2(s)h_1(t)dsdt,$$

$$\frac{\delta^2 F(x)}{\delta x(t)x(s)}=\frac{\alpha^2}{4}\exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(u)du\right)\left\{C_1+C_2\int_T x(u)du\right\}+\alpha C_2\exp\left(\frac{1}{2}\int_T \alpha x(u)du\right).$$

Подставляя полученные выражения вариационных производных первого и второго порядков в левую часть уравнения (1), получим, что функционал (2) действительно является общим решением уравнения (1).

Представленные результаты относятся к исследованиям в недостаточно разработанной области теории дифференциальных уравнений с вариационными производными, встречающихся в различных прикладных областях и математической физике.

Работа авторов [2] также посвящена проблеме точного и приближенного решения отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков. В частности, в ней демонстрируется интерполяционный метод для решения некоторых классов таких уравнений. Достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографиях [3, 4].

Литература

1. Далецкий Ю.Л. Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения // Успехи матем. наук. – 1967. – Т. 22, вып. 4 (136). – С. 3–54.

2. Игнатенко М.В., Янович Л.А. О точном и приближенном решении отдельных дифференциальных уравнений с вариационными производными первого и второго порядков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 51–71.

3. Янович, Л.А. Основы теории интерполирования функций матричных переменных / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко. – Минск: Беларус. навука, 2016. – 281 с.

4. Янович, Л.А., Игнатенко М. В. Интерполяционные методы аппроксимации операторов, заданных на функциональных пространствах и множествах матриц / Л.А. Янович, М.В. Игнатенко. – Минск: Беларус. навука, 2020. – 476 с.