

ФИЛЬТРАЦИЯ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ УСЛОВНО-ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

Бернацкая Я. И.

Белорусский государственный университет ФПМИ, Минск, Беларусь,
e-mail: yana.bernachkaya@gmail.com

Задана частично наблюдаемая случайная последовательность на вероятностном пространстве (Ω, F, P) $(\theta, \xi) = (\theta_t, \xi_t), t = 0, 1, \dots;$

θ_t и ξ_t определяются рекуррентными уравнениями [4]:

$$\begin{aligned}\theta_{t+1} &= \alpha_0(t, \xi) + \alpha_1(t, \xi)\theta_t + b_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + b_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1), \\ \xi_{t+1} &= A_0(t, \xi) + A_1(t, \xi)\theta_t + B_1(t, \xi)\varepsilon_1(t+1) + B_2(t, \xi)\varepsilon_2(t+1)\end{aligned}\quad (1)$$

Задача фильтрации последовательности (1) заключается в оценивании ненаблюдаемой части процесса θ_t по наблюдаемым значениям ξ_t . В таком случае оценка и величина ошибки имеют вид [1]:

$$m_t = M(\theta_t | F_t^\xi), \gamma_t = M[(\theta_t - m_t)(\theta_t - m_t)^T | F_t^\xi] \quad (2)$$

Рекуррентные формулы для вычисления (2):

$$\begin{aligned}m_{t+1} &= (\alpha_0 + \alpha_1 m_t) + (b \circ B + \alpha_1 \gamma_t A_1^T)(B \circ B + A_1 \gamma_t A_1^T)^+ (\xi_{t+1} - A_0 - A_1 m_t), \\ \gamma_{t+1} &= (\alpha_1 \gamma_t \alpha_1^T + b \circ b) - (b \circ B + \alpha_1 \gamma_t A_1^T)(B \circ B + A_1 \gamma_t A_1^T)^+ (b \circ B + \alpha_1 \gamma_t A_1^T)^T\end{aligned}\quad (3)$$

Рассмотрим стационарный в широком смысле процесс со спектральной плотностью:

$$f(\lambda) = \frac{|e^{i\lambda} + 1|^2}{\left|e^{2i\lambda} + \frac{1}{2}e^{i\lambda} + \frac{1}{2}\right|^2} \quad (4)$$

С помощью спектральной плотности вида (4) можем построить ARMA процесс и привести к необходимому для фильтрации виду [5]. С помощью рекуррентных формул (3) получим оценки ненаблюдаемой части процесса θ_t , а также вектор ошибок. Начальные значения θ_0, ξ_0 – случайные величины из $N(0,1)$, а m_0, γ_0 находятся из теоремы о нормальной корреляции.

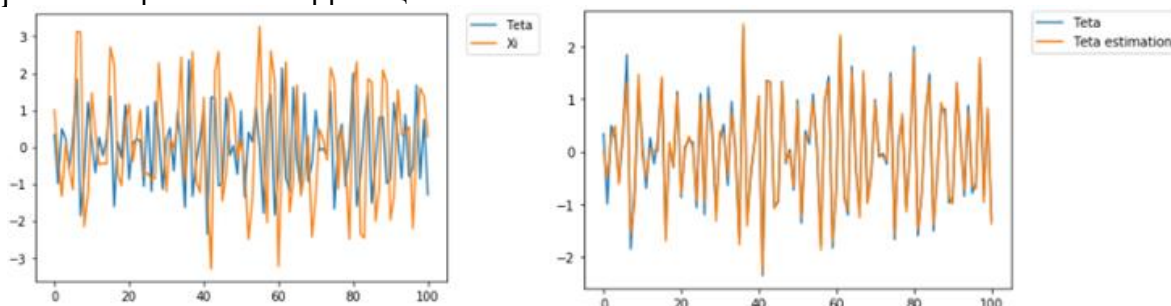


Рис. 1. Результаты фильтрации ARMA процесса

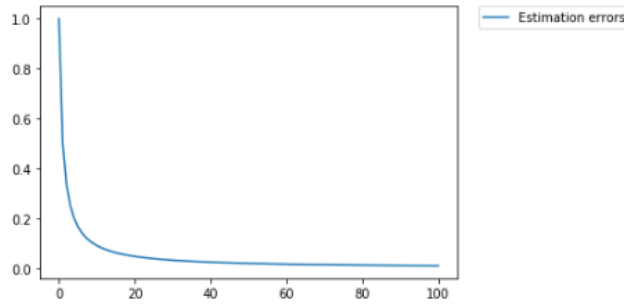


Рис. 2. Зависимость от времени ошибки фильтрации

На рисунке 2 видно, что с увеличением числа наблюдений ошибка оценивания уменьшается и стремится к некоторой постоянной величине.

Рассмотрим AR(q) процесс вида:

$$x_k = \sum_{i=1}^q \theta_i x_{k-i} + \varepsilon_k, \quad k = q, q+1, \dots, \quad (5)$$

где ε_k – вектор белого шума, $\varepsilon_k \sim N(0, 1)$. Причем начальное приближение не зависит от последовательности (ε_k) и корни характеристического полинома $Q(z) = z^q - \theta_1 z^{q-1} - \dots - \theta_q$ лежат внутри единичного круга комплексной плоскости.

Задача заключается в том, чтобы оценить неизвестные параметры θ_i по наблюдениям процесса x_k .

Будем строить последовательные планы оценивания неизвестных параметров с помощью метода наименьших квадратов [9]. На первом этапе определим последовательность моментов остановки по формулам [10]:

$$\tau_k = \inf \left\{ T \geq q : \sum_{i=q}^T \|X_i\|^2 \geq h_k \right\} \quad (6)$$

где (h_k) – последовательность целых положительных чисел (пороговых значений), стремящаяся к бесконечности с увеличением номера.

Далее строятся фрагменты последовательной МНК оценки параметров на основе моментов остановки (6):

$$\theta_k = \Phi_k^{-1} \left(\sum_{i=q}^{\tau_k-1} X_i x_i + \alpha_k X_{\tau_k} x_{\tau_k} \right), \quad \Phi_k = \sum_{i=q}^{\tau_k-1} X_i X_i' + \alpha_k X_{\tau_k} X_{\tau_k}' \quad (7)$$

где последовательность α_k – коэффициенты, на которые надо домножить сумму из формулы (6), чтобы получить ровно пороговое значение h_k .

Второй этап включает непосредственно построение последовательной оценки параметров по формулам [10]:

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{\eta} \beta_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{\eta} \beta_i}, \quad \beta_i = \frac{1}{h_i^2 \|\Phi_i^{-1}\|^2}, \quad \eta = \inf \left\{ p \geq 1 : \sum_{i=1}^p \beta_i \geq H \right\} \quad (8)$$

где H – пороговое значение процесса оценивания, определяется из свойств процесса и выбора последовательности h_k .

Далее рассмотрим теорему, которая поможет ограничить выбор последовательности (h_k) и порогового значения H .

Теорема [10].

Если выполняется:

$$\sum_{i \geq q} \|X_i\|^2 = +\infty; \quad \sum_{i \geq 1} \beta_i = +\infty,$$

то для любого $H > 0$ последовательный план оценивания параметров (6) – (8) имеет следующие свойства:

$$T(H) < 0, \quad E\{\theta\} \|\hat{\theta} - \theta\|^2 \leq \frac{\rho}{H}, \quad \rho = \sum_{k \geq q} \frac{1}{h_k} < \infty$$

где $E\{\theta\}$ – усреднение по распределению P_θ заданного процесса (5).

Рассмотрим AR(2) процесс вида: $x_t = \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$

С помощью формул (6) – (8) вычислим оценки параметров θ_1, θ_2 .

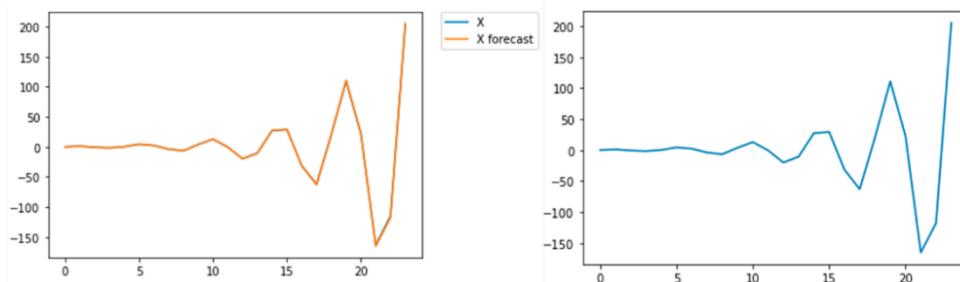


Рис. 3. Результаты последовательного оценивания параметров AR(2) процесса

На рисунке 3 видим, что наблюдаемый первоначально процесс (слева) визуально идентичен процессу, вычисленному с помощью полученных оценок параметров (справа). Вектор ошибки оценивания $(-0.01285, 0.02039)$.

Литература

1. Липцер, Р.Ш. Условно-гауссовские последовательности. Фильтрация и смежные вопросы / Р. Ш. Липцер // Статистика случайных процессов: монография / А. Н. Ширяев; под ред. М. П. Ершова. – М., 1974. – Гл. 13. – С. 492–534.
2. Ширяев, А. Н. Вероятность: учеб. пособие / А. Н. Ширяев. – М.: МЦНМО, 2004. – 323 с.
3. Колос, М. В. Методы линейной оптимальной фильтрации: монография / М. В. Колос. – М.: МГУ, 2000. – 102 с.
4. Hamilton, James D. Times series analysis / James D. Hamilton. – UK: Princeton University Press, 1954. – 800 с.
5. Мармер, В. Линейные процессы: свойства и асимптотические результаты / В. Мармер. – Ванкувер: Университет Британской Колумбии, 2012. – 24 с.
6. Товстик, Т. М. Линейный фильтр Калмана–Бьюси с авторегрессионным сигналом и шумом // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63). Вып. 3. С. 452–463.
7. Новиков, А. А. Последовательное оценивание параметров процессов диффузионного типа // Математические заметки. 1972. Т. 12. Вып. 5. С. 627 – 638.
8. Емельянова, Т. В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии / Т. В. Емельянова, В. В. Конев // Вестник Томского государственного университета: Математика и механика процессов. 2013. Т. 5(25). С. 12–25.
9. Конев, В. В. Последовательные планы идентификации параметров динамических систем / В. В. Конев, С. М. Пергаменщиков // Автомат. и телемех. 1981. Вып. 7. С. 84–92.
10. Конев, В. В. О гарантированном оценивании параметров линейной регрессии при зависимых помехах / В. В. Конев, С. М. Пергаменщиков // Автомат. и телемех. 1997. Вып. 2. С. 75–87.