ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СКМ MATHCAD В КУРСЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Расолько Г. А.

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: rasolka@bsu.by

Изучение дифференциальных уравнений преследует две основные цели: дать студентам базу, необходимую для усвоения материала предметов аналитического цикла, предусмотренных учебными планами соответствующих специальностей, и сформировать составную часть банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.

С теоретической точки зрения, рассматриваемые методы интегрирования в курсе достаточно просты и их применение основано на четких и понятных алгоритмах. Однако, практическое их использование иногда требует от студентов выполнения большого объема вычислений и аналитических преобразований, например, при применении метода неопределенных коэффициентов для построения решений неоднородных стационарных линейных уравнений. Широкие возможности, которыми обладают в этом плане системы компьютерной математики, позволяют, в определенной мере, решить эту проблему. Так, например, использование в процессе обучения системы компьютерной математики (СКМ) MathCad дает возможность не только найти аналитические или численные решения дифференциальных уравнений, но осуществить и визуализацию полученных результатов, построить поле наклонов уравнения, эскизы графиков интегральных и фазовых кривых и тому подобное. Это в полной мере отражено в [1], а именно в указанном практикуме включены примеры и задания с использованием MathCad, а все требуемые теоремы и формулы приведены в начале каждого раздела в кратко изложенном теоретическом материале и в приложении приведен краткий справочник по использованию MathCad.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере изучения темы «Базис пространства решений» [1, с. 26-28].

Совокупность решений $\psi_k(t),\ k=\overline{0,\, n-1}$ линейного однородного уравнения, линейно независима на I тогда и только тогда, когда *определитель Вронского*

$$W(t)=\begin{vmatrix} \psi_0 & \cdots & \psi_{n-1} \\ D\psi_0 & \cdots & D\psi_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D^{n-1}\psi_0 & \cdots & D^{n-1}\psi_{n-1} \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль ни в одной точке I . Из *формулы Лиувилля–Остроградского* $W(t)=W(t_0)\mathrm{e}^{-a_{n-1}t},\ t_0,t\in I,$ следует, что если $W(t_0)\neq 0$, то $W(t)\neq 0$ на I .

Совокупность *n* линейно независимых решений $\psi_k(t),\ k=\overline{0,n-1},$ однородного уравнения $L_n x=0$ образует *базис пространства его решений*.

Общее решение однородного уравнения строится с помощью базиса по формуле

$$x(t)=\sum_{k=0}^{n-1} C_k\psi_k(t), \quad C_k\in\mathbb{R}, \quad k=\overline{0,n-1}.$$

Задание (6.1.1). Показать, что решения $\psi_0(t)=t^2e^{3t}$, $\psi_1(t)=te^{3t}$, $\psi_2(t)=e^{3t}$, $\psi_3(t)=\cos 2t$, $\psi_4(t)=\sin 2t$, $\psi_4(t)=\sin 2t$, $\psi_5(t)=t\sin t$, $\psi_6(t)=\sin t$, $\psi_7(t)=t\cos t$, $\psi_8(t)=\cos t$, однородного уравнения $L_9\,x=0$ образуют базис пространства его решений. Построить это уравнение и записать его общее решение.

Решение.

Определим вектор-строку $\psi(t)$, компонентами которого будут заданные функции $\psi_k(t),\ k=\overline{0,n-1}$. Построим далее функцию, вычисляющую $D^j\psi_k(t),\ j=\overline{1,n-1}$, в любой точке t, а затем функцию $M(j)$, значениями которой будут $D^j\psi_k(0),\ j=\overline{1,n-1}$. По этим значениям, открыв шаблон матрицы размером 9×9, построим матрицу $W0$ и далее вычислим ее определитель.

$$\psi(t) := \left(t^2\cdot e^{3\cdot t}\quad t\cdot e^{3\cdot t}\quad e^{3\cdot t}\quad \cos(2\cdot t)\quad \sin(2\cdot t)\quad t\cdot\sin(t)\quad \sin(t)\quad t\cdot\cos(t)\quad \cos(t)\right)$$

$$D\psi(t,j) := \frac{d^j}{dt^j}\psi(t) \qquad\qquad M(j) := D\psi(0,j)$$

$$\psi(0) \rightarrow (0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$$

$$M(1) \rightarrow (0\ \ 1\ \ 3\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0)$$

$$M(2) \rightarrow (2\ \ 6\ \ 9\ \ -4\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ -1)$$

$$M(3) \rightarrow (18\ \ 27\ \ 27\ \ 0\ \ -8\ \ 0\ \ -1\ \ -3\ \ 0)$$

$$M(4) \rightarrow (108\ \ 108\ \ 81\ \ 16\ \ 0\ \ -4\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$$

$$M(5) \rightarrow (540\ \ 405\ \ 243\ \ 0\ \ 32\ \ 0\ \ 1\ \ 5\ \ 0)$$

$$M(6) \rightarrow (2430\ \ 1458\ \ 729\ \ -64\ \ 0\ \ 6\ \ 0\ \ 0\ \ -1)$$

$$M(7) \rightarrow (10206\ \ 5103\ \ 2187\ \ 0\ \ -128\ \ 0\ \ -1\ \ -7\ \ 0)$$

$$M(8) \rightarrow (40824\ \ 17496\ \ 6561\ \ 256\ \ 0\ \ -8\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$$

$$W0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 18 & 27 & 27 & 0 & -8 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 108 & 108 & 81 & 16 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 540 & 405 & 243 & 0 & 32 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 2430 & 1458 & 729 & -64 & 0 & 6 & 0 & 0 & -1 \\ 10206 & 5103 & 2187 & 0 & -128 & 0 & -1 & -7 & 0 \\ 40424 & 17496 & 6561 & 256 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку определитель Вронского не равен нулю, то заданная система образует базис. Далее выпишем общее решение по формуле

$$x(t)=C_0\,t^2e^{3t}+C_1t\,e^{3t}+C_2\,e^{3t}+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t+C_5t\sin t+C_6\,\sin t+C_7t\cos t+C_8\cos t$$

и, перегруппировав слагаемые, построим решение в виде:

$$x(t)=(C_0\,t^2+C_1t+C_2)\,e^{3t}+(C_3\cos 2t+C_4\sin 2t)+(C_5t+C_6)\sin t+(C_7t+C_8)\cos t.$$

Отсюда видно, что

$$\nu_1=3,\ d_1=3,\ \nu_2=2i,\ d_2=1,\ \nu_3=-2i,\ d_3=1, \nu_4=i,\ d_4=2,\ \nu_5=-i,\ d_5=2.$$

Выполним следующие символьные преобразования, чтобы получить характеристический полином, его коэффициенты и само однородное уравнение.

$$\nu_1:=3 \quad d_1:=3 \quad \nu_2:=2i \quad d_2:=1 \quad \nu_3:=-2i \quad d_3:=1$$

$$\nu_4:=i \quad d_4:=2 \quad \nu_5:=-i \quad d_5:=2$$

$$g(\nu):=\left(\nu-\nu_1\right)^{d_1}\cdot\left(\nu-\nu_2\right)^{d_2}\cdot\left(\nu-\nu_3\right)^{d_3}\cdot\left(\nu-\nu_4\right)^{d_4}\cdot\left(\nu-\nu_5\right)^{d_5}$$

$$g(\nu)\ \text{collect}\ \rightarrow \nu^9-9\cdot\nu^8+33\cdot\nu^7-81\cdot\nu^6+171\cdot\nu^5-243\cdot\nu^4+247\cdot\nu^3-279\cdot\nu^2+108\cdot\nu-108$$

По полученным коэффициентам восстановим однородное уравнение:

$$D^9x-9D^8x+33D^7x-81D^6x+171D^5x-243D^4x+247D^3x-278D^2x+108Dx-108x=0.$$

Задача решена.

Заключение. СКМ MathCad предоставляет пользователю широкие возможности по использованию встроенных операторов (задание переменных, функций, систем, решения СЛАУ, построения графиков и поверхностей и т.д.), а также по созданию собственных посредством программирования.

Проводя вычисления с помощью MathCad кажется, что вы просто работаете с бумагой. MathCad позволяет представлять результаты расчетов таким образом, что их понимают все пользователи. Все вычисления здесь осуществляются на уровне визуальной записи выражений в общеупотребительной математической форме. MathCad имеет хорошие подсказки, обладает широкими возможностями символьных вычислений.

Maple, MATLAB и Mathematica – это языки программирования, гибкие и мощные, но трудные в использовании и требующие длительного времени на изучение. Поэтому, в отличие от MathCad, пользовательский интерфейс их сложен, в нем легко допускать ошибки, которые вынуждают проверять и отлаживать весь код. Программирование не визуально и не интерактивно. Рабочие же листы MathCad можно легко перепроверить. Вычислительные процедуры и важные для расчетов параметры выносятся так, что их можно легко менять и тут же следить за результатами. Использование СКМ позволяет эффективно усваивать и закреплять знания, получаемые студентами, а также и школьниками при изучении общих и специальных математических дисциплин, а не только при выполнении самостоятельных научно-исследовательских работ, подготовке курсовых и прочее.

Продуманная методика преподавания математики позволяет сочетать особенности математики как науки и как учебного предмета в процессе математической подготовки студентов в классическом университете, поскольку математик остается математиком и тогда, когда продумывает методику преподавания.

Литература

1. Альсевич Л. А., Мазаник С. А., Расолько Г. А., Черенкова Л. П. Дифференциальные уравнения. Практикум. Минск: Вышэйшая школа, 2012.