

ЗАМЕЧАНИЕ О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Задача алгебраической классификации обобщенных симметрических пространств (фактически автоморфизмов алгебр Ли) рассматривалась многими авторами [1—4]. В то же время информации о топологическом строении таких пространств, за исключением разрозненных замечаний в [1, 5, 6], явно недостаточно. В настоящей заметке получен первый результат в этом направлении.

Теорема. Любое односвязное обобщенное риманово симметрическое пространство (о. р. с. п.) $(M, g, \{s_x\})$ гомеоморфно тотальному пространству расслоения (P, N, π) . База N этого расслоения гомеоморфна произведению $N \approx N_1 \times \dots \times N_r$, где каждое N_i есть либо однородное факторпространство $G_i/G_i^{\Phi_i}$ простой односвязной группы Ли G_i по подгруппе $G_i^{\Phi_i}$ неподвижных точек периодического автоморфизма Φ_i , либо простая односвязная группа Ли G_i . Слои $\pi^{-1}(x)$ расслоения (P, N, π) представляют собой обобщенные симметрические пространства разрешимого типа.

Доказательство. По теореме А. Дэйке [2. С. 19 и 21], если (M, g) допускает регулярную s -структуру $\{s_x, x \in M\}$, то (M, g) допускает и регулярную s -структуру $\{s'_x, x \in M\}$ конечного порядка, поэтому при изучении топологии $(M, g, \{s_x\})$ мы всегда можем ограничиться периодическим о. р. с. п. Поскольку M односвязно, то M изоморфно как дифференцируемое s -многообразие «каноническому» s -многообразию G/G^Φ , где G — некоторая односвязная группа Ли, Φ — ее периодический автоморфизм, а s -структура определена стандартно (это легко выводится из результатов [3]).

Пусть R — радикал группы G . Факторгруппа $G_1 = G/R$ полупроста и односвязна. Пусть $\tilde{\Phi}$ — автоморфизм G_1 , индуцированный Φ . Тогда $(G_1, \tilde{\Phi})$ и $(G_1, G^\Phi/G^\Phi \cap R, \tilde{\Phi})$ — Φ -пространства, связанные с одной и той же локальной тройкой $(\tilde{g}/\tilde{r}, \tilde{h}/\tilde{r} \cap \tilde{h}, \tilde{\varphi})$ (здесь $\tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{r}$ — алгебры Ли соответственно $G, G^\Phi, R, \tilde{\varphi} = d\tilde{\Phi}_e$). $G_1^{\tilde{\Phi}}$ связно по теореме Ботта — Рашиевского [7], $G^\Phi/G^\Phi \cap R$ связно (по той же причине). Тогда $G_1^{\tilde{\Phi}} = G^\Phi/G^\Phi \cap R$. Проводя теперь дословно доказательство О. Ковальского [2. С. 121], получаем, что G/G^Φ есть расслоение над $G_1/G_1^{\tilde{\Phi}}$ а слои $\pi^{-1}(x) \approx R/R \cap G^\Phi$ ($\approx$ — диффеоморфизм) и обладают структурой регулярного s -многообразия разрешимого типа.

Итак, в дальнейшем нужно рассмотреть топологическое строение многообразия G/G^Φ , где G — полупростая односвязная группа Ли, а Φ — ее периодический автоморфизм. Пусть $G = G_1 \times \dots \times G_m$ — разложение G в прямое произведение односвязных простых групп Ли. Поскольку G_i — простые нормальные подгруппы в G , то либо $\Phi(G_i) \subset G_i$, либо $\Phi(G_i) = G_j, i \neq j$. Это означает, что группа $\Sigma = \{\Phi, \Phi^2, \dots, \Phi^{h-1}, \Phi^h = \text{id}\}$ действует подстановками на множестве $\{G_1, \dots, G_m\}$. Случай $\Phi(G_i) = G_i$ дает $N_i = G_i/G_i^{\Phi_i}$, где $\Phi_i = \Phi|_{G_i}$, и не требует рассмотрения.

Пусть в $\{G_1, \dots, G_m\}$ имеются орбиты, состоящие более чем из одного элемента. Пусть $\{G_t, \dots, G_l, t > 1\}$ — одна такая орбита. Упорядочим ее следующим образом:

$$\Phi(G_1) = G_2, \dots, \Phi(G_{l-1}) = G_l, \Phi(G_l) = G_1. \quad (1)$$

Рассмотрим автоморфизм $\Phi^* \in \text{Aut}(G_1 \times \dots \times G_t)$ вида

$$\Phi^*(g_1, \dots, g_t) = (g_t, g_1, \dots, g_{t-1}) \quad (2)$$

(Φ^* , очевидно, является автоморфизмом, поскольку $G_i \approx G_j$ ввиду (1) и G_i можно отождествить с G_j). Последнее отождествление позволяет рассматривать $G_1 \times \dots \times G_t$ как произведение $G_1 \times \dots \times G_1$, а действие автоморфизма $\Phi: G_i \rightarrow G_j$ отождествить с некоторым автоморфизмом $\Phi_i|G_1$. Иными словами,

$$\Phi = (\Phi_1 \times \dots \times \Phi_t) \circ \Phi^*, \quad (3)$$

здесь $(\Phi_1 \times \dots \times \Phi_t)(g_1, \dots, g_t) = (\Phi_1(g_1), \dots, \Phi_t(g_t))$.

Утверждается, что Φ сопряжен с некоторым автоморфизмом $(\text{id} \times \dots \times \text{id} \times \Psi_t) \circ \Phi^*$ в группе $\text{Aut}(G_1 \times \dots \times G_1)$. В самом деле, умножим обе части (3) слева и справа на Φ_1^{-1} , Φ_1 (для сокращения записи автоморфизм $(\text{id} \times \dots \times \text{id} \times \Phi_i \times \text{id} \times \dots \times \text{id})$ будем обозначать просто Φ_i). Тогда $\Phi_1^{-1} \circ \Phi \circ \Phi_1(g_1, \dots, g_t) = (g_t, \Phi_2 \circ \Phi_1(g_1), \dots, \Phi_t(g_{t-1}))$, откуда

$\Phi_1^{-1} \circ \Phi \circ \Phi_1 = (\tilde{\Phi}_2 \times \dots \times \tilde{\Phi}_t) \circ \Phi^*$, где $\tilde{\Phi}_i = \Phi_{i-1}$, $i = 3, \dots, t$, $\tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$. Далее $\tilde{\Phi}_2^{-1} \circ \Phi_1^{-1} \circ \Phi \circ \Phi_1 \circ \tilde{\Phi}_2 = (\tilde{\Phi}_3 \times \dots \times \tilde{\Phi}_t) \circ \Phi^* \circ \tilde{\Phi}_2$, что влечет $\theta^{-1} \circ \Phi \circ \theta = (\tilde{\Phi}_3 \times \dots \times \tilde{\Phi}_t) \circ \Phi^*$ (устанавливается прямым вычислением). Рассуждая далее по индукции, получаем окончательно

$$\eta^{-1} \Phi \eta = (\text{id} \times \dots \times \text{id} \times \Psi_t) \circ \Phi^*, \quad \theta, \eta \in \text{Aut}(G_1 \times \dots \times G_1). \quad (4)$$

Поскольку в действительности нас интересуют автоморфизмы с точностью до сопряженности в группе $\text{Aut}(G_1 \times \dots \times G_1)$ (см. [3]), то без ограничения общности можем считать, что Φ задан в виде (4). Тогда прямым вычислением убеждаемся в том, что

$$G^{\Phi} = \bar{G}_1^{\Phi_1} \times \dots \times G_s^{\Phi_s} \times \Delta(G_1^{\Psi_1} \times \dots \times G_1^{\Psi_t}) \times \dots \times \Delta(G_t^{\Psi_t} \times \dots \times G_t^{\Psi_t}), \quad (5)$$

здесь $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_s$ соответствуют Σ -орбитам из одного элемента, а остальные — Σ -орбитам из $t_1, \dots, t_l$ элементов соответственно, $s + t_1 + \dots + t_l = m$, Δ — диагональ в $G_h \times \dots \times G_h$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось заметить, что для любой группы Ли G и ее замкнутой подгруппы H имеет место диффеоморфизм $G \times \dots \times G / \Delta(H \times \dots \times H) \cong G^{k-1} \times G/H$ (он задается отображением $(g_1, \dots, g_k) \cdot \Delta(H \times \dots \times H) \rightarrow (g_1 g_k^{-1}, \dots, g_{k-1} \cdot g_k^{-1}, g_k H)$).

Список литературы

1. Wolf J. A., Gray A. // Journ. Diff. Geom. 1968. V. 2. N 1—2. P. 77.
2. Ковальский О. Обобщенные симметрические пространства. М., 1984.
3. Феденко А. С. Пространства с симметриями. Минск, 1977.
4. Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. New York, 1978.
5. Sekigawa K., Yoshida H. // Tensor. 1983. V. 40. N 3. P. 261.
6. Tsagas G. // Tensor. 1985. V. 42. N 1. P. 15.
7. Рашевский П. К. // Тр. Московского матем. об-ва. 1974. Т. 30. С. 3.

Поступила в редакцию 11.03.88.