

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ДОПУСТИМЫЕ ПО РЕСУРСУ РАСПИСАНИЯ ДЛЯ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПРИБОРОВ С МИНИМИЗАЦИЕЙ ШТРАФНОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРВОМ ПРИБОРЕ

Рассмотрим задачу календарного планирования для системы независимых приборов с общим ресурсом, которая состоит в следующем [1].

Имеется  $m$  приборов. Для каждого прибора определено множество  $Z_l, l=\overline{1, m}$ , требований, которые необходимо обслужить на этом приборе;  $Z_l \cap Z_h = \emptyset$  при  $l \neq h$ .

Пусть в системе имеется  $Q$  единиц ресурса одного вида.

Установим взаимно однозначное соответствие между множеством требований  $Z_l$  и множеством натуральных чисел:  $N_l = \{n_{l-1}+1, \dots, n_{l-1}+n_l\}, l=\overline{1, m}, n_l = |Z_l|, n_0=0$ .

Требование  $i \in N_l, n_{l-1}+1 \leq i \leq n_{l-1}+n_l$ , обслуживается в течение  $t_i$  единиц времени и использует  $q_i$  единиц ресурса.

Процесс обслуживания требований может быть описан заданием совокупности  $s = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)\}$  кусочно-постоянных непрерывных слева функций  $s_l = s_l(t), l=\overline{1, m}$ . Каждая функция  $s_l(t)$  задана на интервале  $0 \leq t < +\infty$  и принимает значения из множества  $\{0, n_{l-1}+1, n_{l-1}+2, \dots, n_{l-1}+n_l\}$ . Если  $s_l(t') = i \neq 0$ , то в момент времени  $t'$  прибор  $l$  обслуживает требование  $i \in N_l$ . Если  $s_l(t') = 0$ , то в момент времени  $t'$  прибор  $l$  простаивает. Совокупность функций  $s$  называется расписанием [2].

Расписание обслуживания требований будет допустимо по ресурсу, если суммарное использование ресурса в любой момент времени не превышает  $Q$ .

В работе [1] показано, что задача построения оптимального по быстродействию допустимого по ресурсу расписания при  $m=3$  и всех  $t_i=1$  является  $NP$ -трудной в сильном смысле. Там же приводится алгоритм сложности  $O(n \log n)$  построения оптимального по быстродействию расписания при  $m=2$ , произвольных временах обслуживания требований  $t_i$  и запрещении прерываний в процессе обслуживания требований.

Рассмотрим следующее обобщение поставленной задачи при  $m=2$ . Предположим, что допустимы прерывания в процессе обслуживания требований из множества  $N_2 = \{n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2\}$ , где  $n_2 = |Z_2|$ .

Для требований из множества  $N_1$  рассмотрим любую известную (см., например, [2]) полиномиально разрешимую задачу  $A$  построения оптимального расписания обслуживания требований одним прибором с некоторыми предположениями относительно моментов поступления требований в очередь на обслуживание, директивных сроков, функции штрафа и характера обслуживания требований. Пусть алгоритм  $A$  строит оптимальное расписание для задачи  $A$ .

Обобщенная задача  $B$  состоит в том, что для системы независимых приборов необходимо построить расписание минимальной длины, которое минимизирует функцию штрафа задачи  $A$ , поставленной для требований из множества  $N_1$ . Эту задачу решает алгоритм  $B$ .

**Алгоритм  $B$ .**

1. Упорядочить требования множества  $N_2$  по невозрастанию величин  $q_j$ .

2. Пусть  $P_j$  — подмножество требований из множества  $N_1$ , каждое из которых не может быть обслужено из-за ограничения на потребляемый ресурс вместе с требованием  $j \in N_2$ , но может быть обслужено вместе с требованием  $(j+1) \in N_2$ , если требование  $(j+1)$  существует.

Положить  $P_j = \emptyset$  для всех  $j \in N_2, i=0$ .

3. Положить  $i=i+1$ , вычислить  $k_i = \max \{j : q_i + q_j > Q, j \in N_2\}$ . Добавить к множеству  $P_{j_0}$  требование  $i$  из множества  $N_1$  такое, что  $j_0 = k_i$ .

4. Если  $i=n_1$ , перейти на шаг 5, в противном случае — на шаг 3.
  5. Для требований из множества  $N_1$  выполнить алгоритм  $A$ , который определит функцию  $s_1(t)$ .
  6. Пусть  $\tau^*$  — наиболее поздний момент времени, когда  $s_1(t) \neq 0$ . Положить  $\tau' = 0$ ,  $\tau'' = 0$ ,  $s_1(0) = 0$ ,  $s_2(0) = 0$ .
  7. Если  $\tau' = \tau^*$ , то перейти на шаг 11.
  8. Если  $s_1(t) = 0$  для всех  $\tau' < t \leq \bar{\tau}$  и  $s_1(t) \neq 0$  при  $\bar{\tau} < t \leq \bar{\tau} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое, то положить  $\tau' = \bar{\tau}$  и выполнить следующее.
    - а) Если  $N_2 = \emptyset$ , то перейти на шаг 10.
    - б) Из множества  $N_2$  выбрать требование  $j$  с наименьшим номером (т. е. с наибольшим значением величины  $q_j$ ).
    - в) Положить  $s_2(t) = j$  для всех  $\tau'' < t \leq \min\{\bar{\tau}, \tau'' + t_j\}$ .
    - г) Если  $\tau'' + t_j \leq \bar{\tau}$ , то выполнить следующее: исключить из  $N_2$  требование  $j$  и положить  $\tau'' = \tau'' + t_j$ ; если  $N_2 = \emptyset$ , то перейти на шаг 10; выбрать из  $N_2$  требование  $j^*$  с наименьшим номером, положить  $P_{j^*} = P_{j^*} \cup P_j$ ,  $k_i = j^*$  для всех требований  $i$  из множества  $P_j$ .
  - Если  $\tau'' < \bar{\tau}$ , положить  $j = j^*$  и перейти на шаг 8. в), в противном случае — на шаг 9.
  - д) Если  $\tau'' + t_j > \bar{\tau}$ , то положить  $t_j = t_j - (\bar{\tau} - \tau'')$ ,  $\tau'' = \bar{\tau}$ .
  - 9) Если  $s_1(t) = i$  для всех  $\tau' < t \leq \bar{\tau}$  и  $s_1(t) \neq i$  при  $\bar{\tau} < t \leq \bar{\tau} + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое, то положить  $\tau' = \bar{\tau}$  и выполнить следующее.
    - а) Если  $N_2 = \emptyset$ , то перейти на шаг 10.
    - б) Если  $k_i = n_1 + n_2$ , то положить  $s_2(t) = 0$  для  $\tau'' < t \leq \bar{\tau}$  и перейти на шаг 7. Положить  $j = k_i + 1$ .
    - в) Положить  $s_2(t) = j$  для всех  $\tau'' < t \leq \min\{\bar{\tau}, \tau'' + t_j\}$ .
    - г) Если  $\tau'' + t_j \leq \bar{\tau}$ , то выполнить следующее: исключить из  $N_2$  требование  $j$ , положить  $\tau'' = \tau'' + t_j$ ; выбрать из  $N_2$  требование  $j^*$  с наименьшим номером такое, что  $j^* > j$ , для всех требований  $i$  из  $P_j$  положить  $k_i = j^*$ ,  $P_{j^*} \cup P_j$ . Если такого требования  $j^*$  не существует, то для всех требований  $i$  из  $P_j$  положить  $k_i = n_1 + n_2$ ; положить  $s_2(t) = 0$  для  $\tau'' < t \leq \bar{\tau}$  и перейти на шаг 7. Если  $\tau'' < \bar{\tau}$ , то положить  $j = j^*$  и перейти на шаг 9. в), в противном случае — на шаг 7.
    - д) Если  $\tau'' + t_j > \bar{\tau}$ , то положить  $t_j = t_j - (\bar{\tau} - \tau'')$ ,  $\tau'' = \bar{\tau}$ . Перейти на шаг 7.
  10. Положить  $s_2(t) = 0$  для всех  $\tau'' < t \leq \tau^*$ . Алгоритм заканчивает работу.
  11. Если  $N_2 = \emptyset$ , то алгоритм заканчивает работу.
  12. Выбрать из множества  $N_2$  требование  $j$  с наименьшим номером. Положить  $s_2(t) = j$ ,  $s_1(t) = 0$  для всех  $\tau'' < t \leq \tau'' + t_j$ . Исключить из  $N_2$  требование  $j$ , положить  $\tau'' = \tau'' + t_j$ , перейти на шаг 11.
- Утверждение.** Алгоритм  $B$  строит оптимальное расписание для задачи  $B$ .
- Доказательство.** Пусть  $\bar{t}$  — самый поздний момент времени, когда  $s_1(t) \neq 0$  или  $s_2(t) \neq 0$ .
- Если  $s_1(\bar{t}) \neq 0$ , то построенное расписание для первого прибора минимизирует некоторую функцию штрафа и является оптимальным по быстройдействию расписанием, поэтому расписание  $s(t) = \{s_1(t), s_2(t)\}$  будет также оптимально по быстройдействию.
- Пусть  $s_1(\bar{t}) = 0$  и  $s_2(\bar{t}) \neq 0$ .
- Упорядочим требования множества  $N_1$  по неубыванию величины  $q_i$ ;  $k_i$  имеет тот же смысл, что и ранее,  $k_0 = 0$ . Вычислим

$$\Theta = \max \left\{ \sum_{j=k_l+1}^{k_l} t_j + \sum_{i=l}^{n_1} t_i : 1 \leq l \leq n_1 \right\}.$$

Понятно, что если не рассматривать дополнительные условия для требований из множества  $N_1$ , то нижняя граница длины оптимального по быстродействию расписания будет

$$\max \left\{ \Theta, \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} t_j \right\}.$$

В [1] показано, что это длина оптимального расписания.

Алгоритм  $B$  работает так, что каждый раз при выполнении шагов 8.в) и 9.в) на второй прибор назначается требование с наибольшим значением  $q_j$  из всех требований, которые могут быть назначены без нарушения ресурсного ограничения.

Если на втором приборе нет простоев, то понятно, что длина оптимального расписания равна  $\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} t_j$ .

Пусть на втором приборе имеются простои и  $\bar{t}$  — наиболее ранний момент времени такой, что  $s_2(t) = 0$  для всех  $\bar{t} < t \leq \bar{t} + \epsilon$ , где  $\epsilon > 0$  — достаточно малое. Так как каждый раз на второй прибор назначается требование с наибольшим значением  $q_j$  среди всех требований, которые могут быть назначены без нарушения ресурсного ограничения, то ни одно требование из множества  $N_2$ , обслуженное после момента времени  $\bar{t} + \epsilon$ , не может быть назначено в интервале  $(\bar{t}, \bar{t} + \epsilon]$ . Переназначение требований из множества  $N_2$ , обслуженных ранее интервала времени  $(\bar{t}, \bar{t} + \epsilon]$ , не уменьшит простои на втором приборе. Следовательно, алгоритм минимизирует простои второго прибора, поэтому в данном случае длина построенного расписания будет равна  $\Theta$ .

Итак, алгоритм строит оптимальное по быстродействию расписание, минимизирующее некоторую функцию штрафа для задачи  $A$ , поставленной для требований из множества  $N_1$ .

Отметим, что трудоемкость алгоритма  $B$  не превосходит  $O(n_2 \log n_2 + n_1 n_2 + f(A))$ , где  $f(A)$  — трудоемкость алгоритма  $A$ .

### Список литературы

1. Булгак А. С., Вайнштейн А. Д. // Электронная техника. Сер. 9: Экономика и системы управления. 1985. Вып. 2(55). С. 36.
2. Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М. Теория расписаний. Одностадийные системы. М., 1984.

Поступила в редакцию 12.10.87.