УДК 517.948

Н. В. БРОВКА

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА В ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ РАЗРЕЗАМИ

В расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ возьмем четыре точки, принадлежащие вещественной оси: $-\infty<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4<\infty$. Обозначим: $L_1=[\alpha_1, \alpha_2]$, $L_2=[\alpha_3, \alpha_4]$, $L=L_1\cup L_2$, $D=\overline{C}\setminus L$, B_D — класс вектор-функций $(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$, где $\varphi_1(z), \varphi_2(z)$ — аналитические и ограниченные в D функции; $B_D^{(m_1, m_2)}$ — подкласс вектор-функций из B_D таких, что $\varphi_i(z)$ имеет m_i нулей, $B_D^{(0, 0)}$ — подкласс вектор-функций из $B_D^{(m_1, m_2)}$, не обращающихся в 0; $\widetilde{B}$ — класс вектор-функций, аналитических в D и ограниченных во всякой замкнутой области, не содержащей точек α_s, $s=1, 2, 3, 4$; $\widehat{B}$ — подкласс вектор-функций из $\widetilde{B}$, удовлетворяющих в окрестностях точек α_s, $s=1, 2, 3, 4$, условию

$$\sup \operatorname{Re}\varphi_i(z)<c_i<\infty, \quad i=1, 2. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу: найти аналитический вектор $(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ из $B_D^{(m_1, m_2)}$, предельные значения которого удовлетворяют краевым условиям:

$$\varphi_1^+(t)\varphi_2^-(t)=f_1(t), \quad \varphi_2^+(t)\varphi_1^-(t)=f_2(t), \quad t\in L, \tag{2}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — гельдеровские функции, не обращающиеся в 0 на L. Нелинейная задача сопряжения $\Phi^+(t)\Phi^-(t)=G(t)$ для контура L в плоскости исследовалась в [1—5], для контура на компактной римановой поверхности — в [6]. Впервые задача (2) для голоморфного вектора рассмотрена в [7].

1. Исследуем задачу (2) в $B_D^{(0, 0)}$. Пусть $L'=[\alpha_2, \alpha_3]$. Тогда в $\overline{C}\setminus L\cup L'$ вектор $(\Phi_1(z), \Phi_2(z))=(\ln\varphi_1(z), \ln\varphi_2(z))$ однозначен. Введем вспомогательные функции $F_1(z)=\frac{1}{2}(\Phi_1(z)-\Phi_2(z))$, $F_2(z)=\frac{1}{2}(\Phi_1(z)+\Phi_2(z))$. Вектор $(F_1(z), F_2(z))$ является решением задачи

$$\begin{pmatrix} F_1^+(t) \\ F_2^+(t) \end{pmatrix}=\widetilde{G}(t)\begin{pmatrix} F_1^-(t) \\ F_2^-(t) \end{pmatrix}+\widetilde{g}(t), \tag{3}$$

где $\widetilde{G}(t)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, t\in L,\\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\in L',\end{cases}$ $\quad\widetilde{g}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\ln\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\\ \ln f_1(t)\cdot f_2(t)\end{pmatrix}, \ t\in L,\\ \pi i\begin{pmatrix}k_1-k_2\\ k_1+k_2\end{pmatrix}, \ t\in L',\end{cases}$

$k_1 \ k_2\in \boldsymbol{Z}$.

Нетрудно показать, что $F_2(z)$ должна удовлетворять условию (1), а $F_1(z)$ — неравенству $-\infty\leqslant p_1<\operatorname{Re}F_1(z)\leqslant p_2<+\infty$, $p_1, p_2\in\boldsymbol{R}$.

Решая (3), получаем, что $F_1(z)$ определяется формулой

$$F_1(z)=\frac{1}{4\pi i}\int\limits_L \ln\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}+\frac{k_1-k_2}{2}\ln\frac{z-\alpha_3}{z-\alpha_2}+c, \quad c\in\boldsymbol{C}. \tag{4}$$

Из свойств интеграла типа Коши [8, с. 91] следует, что для того, чтобы $F_1(z)$ удовлетворяла указанному неравенству, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\arg f_1(\alpha_s)=\arg f_2(\alpha_s), \ s=1, 4; \ \arg f_1(\alpha_s)-\arg f_2(\alpha_s)=\pi(k_1-k_2), \quad s=2, 3. \tag{5}$$

Используя результаты [4], получаем, что задача (3) для $F_2(z)$ разрешима тогда и только тогда, когда выполняется условие[4]:

$$\int_L \frac{\arg f_1(t)\cdot f_2(t)}{R(t)}\,dt = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$R(z) = \sqrt{\prod_{j=1}^{4}(z-\alpha_j)},\quad R(z)>0 \text{ при } z>\alpha_4. \tag{7}$$

Будем считать, что условие (6) выполнено. Тогда решением задачи сопряжения в $\widehat{B}$ будет функция [4]:

$$F_2(z) = R_1(z)\left[\frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\ln f_1(t) f_2(t)}{R_1(t)}\cdot\frac{dt}{t-z} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_1+k_2}{2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\frac{1}{R_1(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}\right] + \frac{P(z)}{R(z)}, \tag{8}$$

где

$$P(z) = \begin{cases} \left(p+\dfrac{k_1+k_2}{2}q\right)\left(\prod\limits_{k=1}^{3}(z-\lambda_k) - \prod\limits_{s=2}^{4}(z-\alpha_s)\right), & \dfrac{k_1+k_2}{2} \neq -\dfrac{p}{q}, \\ \mu_0(z-\mu_1)(z-\mu_2), & \dfrac{k_1+k_2}{2} = -\dfrac{p}{q}, \end{cases} \tag{9}$$

$\lambda_1,\ \mu_1 \in [\alpha_1,\ \alpha_2],\ \lambda_2,\ \mu_2 \in [\alpha_3,\ \alpha_4],\quad \lambda_3 \in [\alpha_4,\ \infty[$ при $\dfrac{k_1+k_2}{2} > -\dfrac{p}{q}$, $\lambda_3 \in]-\infty,\ \alpha_1]$ при $\dfrac{k_1+k_2}{2} < -\dfrac{p}{q}$, $\mu_0 \leqslant 0$ при $\dfrac{k_1+k_2}{2} = -\dfrac{p}{q}$, и введены обозначения:

$$R_1(z) = \frac{\sqrt{(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}}{\sqrt{z-\alpha_1}},\quad R_1(z)>0 \text{ при } z>\alpha_4, \tag{10}$$

$$p = \frac{1}{4\pi i}\int_L \frac{\ln f_1(t) f_2(t)}{R(t)}\,dt,\quad q = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\frac{dt}{R(t)} < 0, \tag{11}$$

$R(z)$ определяется формулой (7). Итак, получили

Утверждение 1. Задача (2) разрешима в $\widehat{B}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (5), (6). Решение (2) в этом случае имеет вид:

$$(\varphi_1(z),\ \varphi_2(z)) = \left(\left(\frac{z-\alpha_3}{z-\alpha_2}\right)^{\frac{k_1-k_2}{2}}\cdot\exp\left\{\frac{1}{4\pi i}\int_L \ln\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\cdot\frac{dt}{t-z} + \right.\right.$$

$$\left. + R_1(z)\left[\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\ln f_1(t) f_2(t)}{R_1(t)}\,\frac{dt}{t-z} + \frac{k_1+k_2}{2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\frac{1}{R_1(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}\right] + \frac{P(z)}{R(z)} + c\right\},$$

$$\left(\frac{z-\alpha_2}{z-\alpha_3}\right)^{\frac{k_1-k_2}{2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{4\pi i}\int_L \ln\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\cdot\frac{dt}{t-z} + R_1(z)\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left[\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\ln f_1(t) f_2(t)}{R_1(t)}\cdot\frac{dt}{t-z} + \frac{k_1+k_2}{2}\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}\frac{1}{R_1(t)}\cdot\frac{dt}{t-z} + \frac{P(z)}{R(z)} - c\right\}\right),$$

где $R_1(z)$ определяется формулой (10), $P(z)$ — (9), $R(z)$ — (7).

2. Рассмотрим задачу (2) в $B_D^{(m_1,\,m_2)}$. Пусть $\varphi_i(z)$ имеет нули в точках $z = z_{ji} \neq \infty$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_i$, $i = 1,\ 2$ (z_{ji} могут совпадать). Применим схему работы [4]. Построим вектор $(\psi_1(z),\ \psi_2(z)) \in B_D^{(m_1,\,m_2)}$ такой, чтобы выполнялось условие $\varphi_i(z)/\psi_i(z) \neq 0$, $i = 1,\ 2$, в D. (Функции $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$ строятся неоднозначно). Их можно взять в виде [4]: $\psi_i(z) =$ $= X_i(z)\prod\limits_{j=1}^{m_i}(z - z_{ji})$, $i = 1,\ 2$, где [9]

$$X_i(z)=\frac{1}{(z-\alpha_2)^{m_i}}\cdot\exp\left[\frac{m_i}{\alpha_2-\alpha_1}(z-\alpha_1)\ln\frac{z-\alpha_2}{z-\alpha_1}\right],\ i=1,\ 2, \tag{12}$$

и ветви логарифма выбираются из условия $\lim\limits_{z\to\infty}\ln\frac{z-\alpha_2}{z-\alpha_1}=0$. Отсюда следует, что функции $\tilde{\varphi}_i(z)=\varphi_i(z)/\psi_i(z)$, $i=1,\ 2$, не обращаются в 0 в D и удовлетворяют краевым условиям:

$$\tilde{\varphi}_1^+(t)\,\tilde{\varphi}_2^-(t)=\tilde{f}_1(t),\ \tilde{\varphi}_2^+(t)\,\tilde{\varphi}_1^-(t)=\tilde{f}_2(t),\ t\in L, \tag{13}$$

где $\tilde{f}_1(t)=\dfrac{f_1(t)}{\psi_1^+(t)\,\psi_2^-(t)}$, $\tilde{f}_2(t)=\dfrac{f_2(t)}{\psi_1^-(t)\,\psi_2^+(t)}$, $t\in L$.

Задача (13) в $B_D^{(0,0)}$ решена выше. Необходимыми и достаточными условиями ее разрешимости являются:

$$\int\limits_L\frac{\arg\tilde{f}_1(t)\,\tilde{f}_2(t)}{R(t)}\,dt=0, \tag{14}$$

$$\arg\tilde{f}_1(\alpha_s)=\arg\tilde{f}_2(\alpha_s),\ s=1{,}4;\ \arg\tilde{f}_1(\alpha_s)-\arg\tilde{f}_2(\alpha_s)=\pi(k_1-k_2),\ s=2{,}3. \tag{15}$$

Из [4] следует, что подходящим выбором точек z_{ji}, $i=1,\ 2$, $j=1,\ 2,\ \ldots$ $\ldots,\ m_1+m_2$ всегда можно добиться выполнения условия (14). Условие (15) эквивалентно условию (5). Из вышесказанного следует

Утверждение 2. Задача (2) разрешима в $B_D^{(m_1,\,m_2)}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (5), и ее решением является вектор:

$$(\varphi_1(z),\ \varphi_2(z))=\left(\tilde{\varphi}_1(z)\,X_1(z)\prod_{j=1}^{m_1}(z-z_{j1}),\quad \tilde{\varphi}_2(z)\,X_2(z)\prod_{j=1}^{m_2}(z-z_{j2})\right),$$ где

$(\tilde{\varphi}_1(z),\ \tilde{\varphi}_2(z))$ — решение задачи (13) в $B_D^{(0,\,0)}$, $X_i(z)$, $i=1,\ 2$, определяется формулой (12).

3. Рассмотрим задачу

$$|\varphi^+(t)|=f_1(t),\ |\varphi^-(t)|=f_2(t),\ t\in L, \tag{16}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — действительно-значные гельдеровские, не обращающиеся в 0 функции на L. Используя результаты п. 1, получаем

Утверждение 3. Задача (16) в классе ограниченных, не имеющих в D нулей функций, разрешима. Ее решение имеет вид:

$$\varphi(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\ln\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}+\right.$$

$$\left.+\frac{R_1(z)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln f_1(t)\,f_2(t)}{R_1(t)}\cdot\frac{dt}{t-z}+\frac{P(z)}{R(z)}+i\alpha\right\},$$

где $\alpha\in\boldsymbol{R}$, $P(z)$ определяется из формулы (9), $R(z)$ — (7), $R_1(z)$ — (10).

Для получения решения задачи (16) в классе функций, имеющих нули в D, необходимо применить методику п. 2.

Список литературы

1. Черепанов Г. П. // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4.
2. Черепанов Г. П. // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 3.
3. Говоров Н. В., Кузнецов Н. К. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, 1974. Вып. 20.
4. Кузнецов Н. К. // Изв. вузов СССР. Матем. Казань, 1977. № 11.
5. Кашевский В. В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1982. № 4.
6. Чаевский Г. Г. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 2.
7. Примачук Л. П. // Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1981. № 1.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1961.
9. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1963.

Поступила в редакцию 22.06.87.