Для связывающего числа деревьев нижнюю и верхнюю границы в неравенствах (2) нельзя улучшить. Ясно, что $\operatorname{bind}(K_{1,k})=\frac{1}{k}$. Для дерева T^n (см. рисунок) легко показать, что $\operatorname{bind}(T^n)=\frac{1}{k+1-\frac{1}{n}}$. Таким образом, $\operatorname{bind}(T^n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{k+1}+0$.

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
2. Woodall D. R. // Journ. Comb. Theory. Ser. B. 1973. V. 15. P. 225.
3. Kane V. G., Mohanty S. P., Hales R. S. // ARS Combinatoria. 1981. V. 11. P. 201.
4. Jianfang V., Songlin T., Jingiang L. // Lect. Notes Math. 1984. № 1073. P. 119.
5. Michalak D. // Graphs, hypergraphs and matroids. Zielona Gora. 1985. P. 45.
6. Borowiecki M. Ibid. P. 85.
7. Kwaśnik M. Ibid. P. 35.

Поступила в редакцию 25.06.87.

УДК 517.948.32:517:544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В ВИНЕРОВСКИХ КОЛЬЦАХ НА ОБЪЕДИНЕНИИ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КРУГОВ

Пусть K_1 — круг $|z-z_1|<r_1$, ∂K_1 — окружность $|t-z_1|=r_1$; K_2 — круг $|z-z_2|<r_2$, ∂K_2 — окружность $|t-z_2|=r_2$. Через $W(\partial K_1)$ и $W(\partial K_2)$ обозначим винеровские кольца функций, представимых в виде сумм абсолютно сходящихся степенных рядов $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t-z_1)^k$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} b_k\times$ $\times(t-z_2)^k$ при $t\in\partial K_1$ и при $t\in\partial K_2$ соответственно. Через $W(\bar{K}_1)$ и $W(\bar{K}_2)$ обозначим подкольца, состоящие из всех тех функций колец $W(\partial K_1)$ и $W(\partial K_2)$, которые аналитически продолжимы в круги K_1 и K_2 соответственно. Зададим функции $a_1(z)\in W(\bar{K}_1)$, $a_2(z)\in W(\bar{K}_2)$, не обращающиеся в нуль на окружностях ∂K_1 и ∂K_2 соответственно. Предполагая, что $K_1\cap K_2\neq\varnothing$, зададим еще функцию $g_0(z)$, аналитическую в $K_1\cap K_2$, H-непрерывную с показателем $\lambda>1/2$ в замыкании $\overline{K_1\cap K_2}$.

Рассмотрим следующую задачу: Найти все функции $F_1(z)\in W(\bar{K}_1)$, $F_2(z)\in W(\bar{K}_2)$, удовлетворяющие следующему функциональному уравнению:

$$a_1(z)F_1(z)-a_2(z)F_2(z)=g_0(z),\quad z\in\overline{K_1\cap K_2}. \tag{1}$$

Следуя [1, с. 595], будем вводить в рассмотрение дивизоры на плоскости (т. е. конечные совокупности точек плоскости вместе с предписанными этим точкам целыми кратностями). Через (f) будем обозначать дивизор, составленный из всех нулей и полюсов (с учетом кратностей) заданной мероморфной функции $f(z)$. Сформулируем результат этой работы.

Теорема. Пусть Δ_1 — целый дивизор, являющийся общим наибольшим делителем дивизоров (a_1) и (a_2). При введенных выше ограничениях для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы функция $g_0(z)$ была кратной дивизору Δ_1. При выполнении этого условия общее решение уравнения (1) линейно зависит от одной произвольной функции класса $W(\bar{K}_1)\cap W(\bar{K}_2)$ и дается формулами (7).

Необходимость условия теоремы легко устанавливается от противного. Предполагая уравнение (1) разрешимым, мы можем говорить о тождестве (1). Пусть $\Pi(z)$ — многочлен степени $\operatorname{ord}\Delta_1$, дивизор нулей которого в точности совпадает с дивизором Δ_1. В случае, когда функции $a_1(z)$ и $a_2(z)$ не имеют общих нулей, полагаем $\Pi(z)\equiv 1$. Если предположить, что функция $g_0(z)$ не кратна дивизору Δ_1, то, умножая тождество (1) на функцию $1/\Pi(z)$, мы получим тождество, левая часть которого аналитична, а правая — мероморфна в $K_1\cap K_2$.

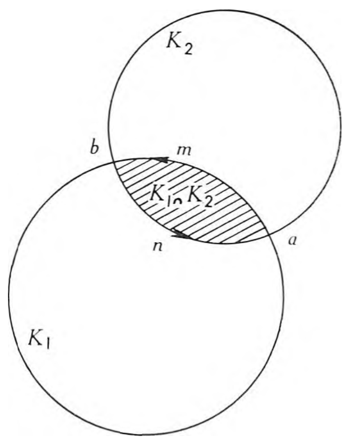
Предполагая выполненным условие теоремы, установим его достаточность с помощью метода аналитического продолжения. Пусть $\Pi(z)$ — введенный выше многочлен. Вводя, кроме того, функции

$$b_1(z):=\frac{a_1(z)}{\Pi(z)}\in W(\overline{K}_1);\quad b_2(z):=\frac{a_2(z)}{\Pi(z)}\in W(\overline{K}_2);\quad g_1(z):=\frac{g_0(z)}{\Pi(z)},\tag{2}$$

получим равносильное (1) уравнение

$$b_1(z)F_1(z)-b_2(z)F_2(z)=g_1(z),\ z\in\overline{K_1\cap K_2},\tag{3}$$

коэффициенты $b_1(z)$ и $b_2(z)$ которого взаимно просты, а в остальном удовлетворяют тем же условиям, что и коэффициенты уравнения (1). Введем функцию (обозначения на рисунке):



$$g_2(z):=g_1(z)-\left(\frac{z-b}{a-b}g_1(a)+\frac{z-a}{b-a}g_1(b)\right),\tag{4}$$

аналитическую в $K_1\cap K_2$, H-непрерывную с показателем $\lambda>1/2$ в $\overline{K_1\cap K_2}$ и удовлетворяющую условиям: $g_2(a)=g_2(b)=0$. Представим функцию $g_1(z)$ при $z\in K_1\cap K_2$ в виде:

$$g_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial(\overline{K_1\cap K_2})}\frac{g_1(\tau)\,d\tau}{\tau-z}=\frac{z-b}{a-b}g_1(a)+\frac{z-a}{b-a}g_1(b)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial(\overline{K_1\cap K_2})}\frac{g_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}=\frac{z-b}{a-b}g_1(a)+\frac{z-a}{b-a}g_1(b)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{amb}\frac{g_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{bna}\frac{g_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}.$$

Подставляя это выражение для $g_1(z)$ в (3), получаем при $z\in\overline{K_1\cap K_1}$:

$$b_1(z)F_1(z)-\left(\frac{z-b}{a-b}g_1(a)+\frac{z-a}{b-a}g_1(b)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{amb}\frac{g_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}\right)=$$
$$=b_2(z)F_2(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{anb}\frac{g_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}.\tag{5}$$

Левая часть этого равенства аналитична в K_1, правая — в K_2. Отсюда, применяя теорему об аналитическом продолжении, заключаем, что функция

$$f(z)=\begin{cases} b_1(z)F_1(z)-\left(\dfrac{z-b}{a-b}g_1(a)+\dfrac{z-a}{b-a}g_1(b)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{amb}\dfrac{g_2(\tau)d\tau}{\tau-z}\right), & z\in K_1,\\ b_2(z)F_2(z)-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{anb}\dfrac{g_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}, & z\in K_2,\end{cases} \tag{6}$$

аналитична в объединении $K_1\cup K_2$. Более того, беря в качестве значений функции $f(z)$ на ∂K_1 и ∂K_2 соответствующие предельные значения из (6), покажем, что $f(z)\in W(\bar{K}_1)\cap W(\bar{K}_2)$.

Так как $g_2(a)=g_2(b)=0$, то предельные значения на ∂K_1 и ∂K_2 соответствующих интегралов типа Коши из (6) H-непрерывны там, причем с показателем $\lambda>1/2$ (см. [2, с. 53]). Отсюда по теореме С. Н. Бернштейна [3, с. 394] заключаем, что интегралы, входящие в (6), принадлежат пространствам $W(\bar{K}_1)$ и $W(\bar{K}_2)$ соответственно. Таким образом, в первой строке правой части (6) записана функция из $W(\bar{K}_1)$, а во второй — из $W(\bar{K}_2)$. Отсюда следует, что должно быть $f(z)\in W(\bar{K}_1)\cap W(\bar{K}_2)$. Если обе функции $b_1(z)$ и $b_2(z)$ нигде не обращаются в нуль, то общее решение уравнения (1) можно найти из (6) при произвольной функции $f(z)\in W(\bar{K}_1)\cap W(\bar{K}_2)$. В случае, когда хотя бы одна из функций $b_1(t)$ или $b_2(t)$ имеет нули, введем в рассмотрение дивизор $\Delta_2:=(b_1\cdot b_2)$. Пусть $P(z)$ — многочлен, дивизор нулей которого в точности совпадает с дивизором Δ_2, а $Q(z)$ — интерполяционный многочлен Эрмита, такой, что он и его производные до соответствующих порядков во всех точках дивизора Δ_2 равны соответствующим значениям правой части равенства (6). Многочлены с указанными свойствами всегда существуют, причем многочлен $Q(z)$ определяется однозначно, а многочлен $P(z)$ — с точностью до постоянного множителя. Задавая произвольно функцию $f_1(z)\in W(\bar{K}_1)\cap W(\bar{K}_2)$, положим в (6) $f(z)=Q(z)+P(z)f_1(z)$. Отсюда и из (6) находим общее решение уравнения (1):

$$\begin{aligned} F_1(z)&=\frac{1}{b_1(z)}\left\{\frac{z-b}{a-b}g_1(a)+\frac{z-a}{b-a}g_1(b)+\frac{1}{2\pi i}\int_{amb}\frac{g_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}+\right.\\ &\qquad\left.+Q(z)+P(z)f_1(z)\right\},\quad z\in K_1;\\ F_2(z)&=\frac{1}{b_2(z)}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{anb}\frac{g_2(\tau)\,d\tau}{\tau-z}+Q(z)+P(z)f_1(z)\right\},\quad z\in K_2, \end{aligned} \tag{7}$$

где $b_1(z)$, $b_2(z)$, $g_1(z)$ — из (3), $g_2(z)$ — из (4). Принадлежность правых частей равенства (7) соответствующим кольцам обеспечивается налагаемыми ограничениями и выбором функций Q, P, f_1. В случае, когда обе фукнции $b_1(z)$, $b_2(z)$ нигде не обращаются в нуль, следует положить в (7) $Q(z)\equiv 0$, $P(z)\equiv 1$.

Список литературы

1. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. Т. 1.

Поступила в редакцию 26.05.87.

УДК 539.3:534.1

В. И. ПРУСОВ

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Напряженно-деформированное состояние бесконечной полосы под действием заданных усилий или заданных перемещений на ее границах, а также смешанная задача, исследовались в [1—3].