$-x^*+1\big)$. Теперь с множествами H_1 и H_2 поступаем таким же образом. Алгоритм закончит работу, когда будут просмотрены все m цепей.

Оценим трудоемкость алгоритма A_2 по числу обращений к signgrad$f$-оракулу. На первом шаге требуется $\log_2 n$ обращений к signgrad$f$-оракулу. На втором $\log_2 n_1+\log_2 n_2$, где $n_1+n_2=n+1$. Ясно, что сумма логарифмов принимает наибольшее значение при $n_1=n_2=\frac{n+1}{2}$. Суммируя число обращений к signgrad$f$-оракулу на каждом шаге и учитывая, при каких условиях достигается наибольшая сумма, получаем

Утверждение 4. Алгоритм A_2 требует $m\cdot\log_2(n+1)+3m-1-(m+1)\log_2(m+1)$ обращений к signgrad$f$-оракулу.

Алгоритм A_3. Если signgrad$f((x,y))=$«+», где $x=(1,\ n-1)$, $y=(1,\ n)$, то отбрасываем фильтр $F(y)$, получая тем самым $H(m,\ n-1)$, в противном случае отбрасываем идеал $I(x)$, получая $H(m-1,\ n)$. С полученным множеством действуем аналогично, пока не получим $H(1,\ 1)$.

Утверждение 5. Алгоритм A_3 строит множество квазилокальных минимумов выпуклой функции f на $H(m,\ n)$ за не более чем $m+n-2$ обращения к signgrad$f$-оракулу.

Действуя при помощи данного алгоритма, но обращаясь к f-оракулу, можно найти минимум выпуклой f на $H(m,\ n)$ не более чем за $n+2m-2$ обращения к f-оракулу.

Список литературы

1. Ковалев М. М., Мощенский А. В. // Тез. докл. 9-го всесоюз. симп.: Системы програм. обеспечения решения задач оптим. планирования. Минск, 1986. С. 84.
2. Linial N., Saks M. E. Information bounds are good for search problems on ordered data structures // 24th IEEE FOCS. 1983. P. 473.
3. Faigle U., Lovas L., Schrader R., Gy Turan // Inst. Ökon. Oper. Res. Univ. Bonn. 1984, Rep. № 84320-OR.
4. Linial N., Saks M. // Journ. of algorithms. 1985. V. 6. P. 86.
5. Сержантов А. В. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 2. С. 304.

Поступила в редакцию 11.12.86.

УДК 519.72

Г. Л. ПЕТРОВА

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА МОЩНОСТИ КОДОВ, БЛИЗКИХ К РАВНОВЕСНЫМ

Равновесные коды отличаются простотой реализации и эффективностью применения при несимметричных ошибках [1], а также в теории булевых функций [2].

В настоящей работе строятся коды, по своим основным параметрам близкие к равновесным, но обладающие большей мощностью.

Рассмотрим все булевы n-мерные векторы, каждый из которых содержит ровно ω единиц, причем расстояние Хемминга между любыми двумя из них не меньше δ. Обозначим число элементов такого кода через $A(n,\ \delta,\ \omega)$. В работе [3] получена нижняя оценка этого числа, для чего строится соответствующий код. В частности, при $\delta=4$

$$A\left(n,\ 4,\ \left[\frac{n}{2}\right]\right)\geqslant\frac{1}{n}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

Построение этого кода основано на рассмотрении максимальной антицепи, задаваемой уравнением

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\left[\frac{n}{2}\right]. \qquad (1)$$

Рассмотрим вместо антицепи (1) обобщенную плоскую антицепь в n-мерном булевом кубе, состоящую из точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих уравнению $x_1 + x_2 + \ldots + x_k + 2(x_{k+1} + \ldots + x_n) = s$. Обозначим ее через $C^s_{k,\,n-k}$. Пусть $A^0(n, 3, s)$ — число точек в этой антицепи, расстояние Хемминга между любыми двумя из которых не меньше 3, и пусть далее $n_k = \max(k, n-k)$.

Теорема 1. Справедливо неравенство $A^0(n, 3, s) \geqslant \frac{1}{n_k}|C^s_{k,\,n-k}|$.

Доказательство. Рассмотрим отображение φ векторов антицепи $C^s_{k,\,n-k}$ на множество классов вычетов по модулю n_k: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} jx_j \pmod{n_k}$.

Легко проверить, что множество $\varphi^{-1}(i)$ для всякого i, $0 \leqslant i \leqslant n_k$ состоит из векторов антицепи $C^s_{k,\,n-k}$, расстояние Хемминга между любыми двумя из которых не меньше 3.

В самом деле, пусть $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\tilde{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — два вектора антицепи $C^s_{k,\,n-k}$, принадлежащие одному классу вычетов по $\bmod\, n_k$ и $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = 2$. Тогда $\sum_{j=1}^{n} jx_j = \sum_{j=1}^{n} jy_j \equiv i \pmod{n_k}$. Пусть у векторов $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ различны только координаты с номерами s и t, $s<t$. Тогда либо $s, t \leqslant k$, либо $s, t > k$, так как в противном случае эти векторы не могут одновременно принадлежать антицепи $C^s_{k,\,n-k}$. Рассмотрим, например, случай $s, t \leqslant k$. Пусть $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{s-1}, 1, x_{s+1}, \ldots, x_{t-1}, 0, x_{t+1}, \ldots, x_n)$, $\tilde{y} = (x_1, \ldots, x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \ldots, x_{t-1}, 1, x_{t+1}, \ldots, x_n)$, поэтому $\sum_{j=1}^{n} jx_j - \sum_{j=1}^{n} jy_j = t - s \equiv 0 \pmod{n_k}$. Тем самым получено противоречие, поскольку $t - s \not\equiv 0 \pmod{n_k}$.

Случай $s, t > k$ рассматривается аналогично. Так как $|\varphi^{-1}(0)| + |\varphi^{-1}(1)| + \ldots + |\varphi^{-1}(n_k)| = |C^s_{k,\,n-k}|$, то хотя бы для одного i $|\varphi^{-1}(i)| \geqslant \frac{1}{n_k}|C^s_{k,\,n-k}|$.

Лемма из [4] позволяет находить антицепь максимальной мощности среди антицепей вида $C^s_{k,\,n-k}$, где $0 \leqslant 2s \leqslant k + 2(n-k) = 2n + k$. Для получения оценки величины $A^0(n, 3, s)$ снизу используем указанные антицепи отдельно в случаях $n = 8k, n = 8k+1, \ldots, n = 8k+7$.

При $n = 8k$ рассмотрим срединную антицепь: $x_1 + x_2 + \ldots x_{4k} + 2(x_{4k+1} + \ldots + x_{8k}) = 6k$. Положив $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_{4k}$, $Y = x_{4k+1} + \ldots + x_{8k}$, найдем все решения уравнения $X + 2Y = 6k$:

$$\begin{array}{c|cccccc} X & 0 & 2 & \ldots & 2i & \ldots & 4k \\ \hline Y & 3k & 3k-1 & \ldots & 3k-i & \ldots & k \end{array}.$$

Поэтому

$$|C^{6k}_{4k,\,4k}| = \sum_{i=0}^{2k} \binom{4k}{2i} \binom{4k}{3k-i}.$$

В случае $n = 8k + 1$, рассматривая антицепь $x_1 + x_2 + \ldots + x_{4k} + 2(x_{4k+1} + \ldots + x_{8k} + x_{8k+1}) = 6k$, находим

$$|C^{6k}_{4k,\,4k+1}| = \sum_{i=0}^{2k} \binom{4k}{2i} \binom{4k+1}{3k-i}.$$

Аналогичные формулы можно получить для $n = 8k + r$ при $r = 2, 3, \ldots, 7$. Все вычисленные таким образом формулы можно объединить в одну:

2 Зак. 1230

$$|C^{6k+2\lambda_r}_{4k+\lambda_r,\ 4k+r-\lambda_r}| = \sum_{i=0}^{2k+\left[\frac{\lambda_r}{2}\right]} \binom{4k+\lambda_r}{2i}\binom{4k+r-\lambda_r}{3k+\lambda_r-i},$$

где $\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 2,\ \lambda_5 = 2,\ \lambda_6 = 3,\ \lambda_7 = 3$.

Ради краткости введем для этих антицепей обозначения C_{8k+r}, $r = 0, 1, \ldots, 7$. Обозначим через $\lceil\alpha\rceil$ минимальное целое число, не меньшее α.

Сформулируем теперь основной результат, вытекающий из теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $n=8k+r$, $r=0, 1, \ldots, 7$. Тогда

$$\max_s A^0(n,\ 3,\ s) \geqslant \frac{1}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} |C_{8k+r}|.$$

Можно показать, что полученная оценка для $A^0(n, 3, s)$ лучше известной для $A(n,\ 4,\ \omega)$, но это требует отдельного рассмотрения случаев $r=0, r=1, \ldots, r=7$.

Пусть, например, $n=8k$. Будем считать, что $k \geqslant 3$. Случаи $k=0, 1, 2$ рассматриваются непосредственно. Покажем, что

$$\frac{1}{8k}\binom{8k}{4k} < \frac{1}{4k}\sum_{i=0}^{2k}\binom{4k}{2i}\binom{4k}{3k-1}. \tag{2}$$

Рассмотрим следующие, легко проверяемые при $k \geqslant 3$, неравенства:

$$\binom{4k}{0}^2 + \binom{4k}{1}^2 < 2\binom{4k}{0}\binom{4k}{k}, \tag{3}$$

$$\binom{4k}{i}^2 + \binom{4k}{2i+1}^2 < 2\binom{4k}{i}\binom{4k}{k+i},\quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k-2, \tag{4}$$

$$\binom{4k}{2k-2}^2 + \binom{4k}{2k-1}^2 + \frac{1}{2}\binom{4k}{2k}^2 < 2\binom{4k}{2k-1}\binom{4k}{2(k-1)} + \binom{4k}{2k}. \tag{5}$$

Сложив неравенства (3)—(5) и воспользовавшись тем, что

$$\binom{8k}{4k} = \sum_{i=0}^{4k}\binom{4k}{i}^2 = 2\sum_{i=0}^{2k-1}\binom{4k}{i}^2 + \binom{4k}{2k}^2,$$

$$2\sum_{i=0}^{2k}\binom{4k}{i}\binom{4k}{k+i} = 2\left(2\sum_{i=0}^{k-1}\binom{4k}{2i}\binom{4k}{k+i} + \binom{4k}{2k}^2\right),$$

получим неравенство (2).

Список литературы

1. Касами Т., Токура Н., Ивадари Ё., Инагаки Я. Теория кодирования. М., 1978.
2. Hammer P. L., Ibaraki T., Peled U. N. // Ann. Diser. Math. 1981. V. 11. P. 125.
3. Graham R. L., Sloane N. J. // IEEE Trans. Inform. Theory. 1980. V. 26. № 1. P. 37.
4. Петрова Г. Л. // Кибернетика. 1985. № 4. С. 113.

Поступила в редакцию 02.02.87.

УДК 681.3

ДО СУАН ТХО

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТЫХ ТАБЛИЦ

В [1] обобщенная таблица используется как инструмент для оптимизации одного класса запросов пользователей в реляционной базе данных, однако проверка эквивалентности двух таблиц, вообще — NP-полная за-