



УДК 539.189.1

Л. А. БОРИСОГЛЕБСКИЙ, Е. Е. ТРОФИМЕНКО

ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЛЕГКОГО ПИОННОГО АТОМА С ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИМ ПИОН-ЯДЕРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Для описания эффектов сильного взаимодействия в пионных атомах обычно численно решают уравнение Клейна — Фока — Гордона с потенциалом, учитывающим как электромагнитное, так и сильное взаимодействие пиона с ядром [1]. Отправной точкой в таких расчетах служит оптический потенциал Кисслинджера — Эриксонов, который в общем случае содержит девять вещественных параметров. Численное решение уравнения Клейна — Фока — Гордона — сложная задача, а исследование при этом зависимости получаемых результатов от параметров потенциала в значительной степени удлинит расчеты. Известно [2], что, если представить ядро как равномерно заряженный по объему шар радиусом R , а потенциал пион-ядерного взаимодействия выбрать в виде потенциальной ямы глубиной V и радиусом, равным радиусу распределения заряда ядра, можно, несмотря на значительное несовершенство такой модели, правильно описать основные черты пионных атомов и с достаточной степенью точности получить сдвиги уровней вследствие сильного взаимодействия. Цель предлагаемой статьи, которая является продолжением работы [3], состоит в вычислении волновой функции $1s$ -состояния легкого пионного атома в рамках сформулированной модели.

Для легких атомов релятивистские поправки малы, поэтому воспользуемся уравнением Шредингера [2]: $H\psi = E\psi$, где

$$H = -\frac{1}{2\mu^2} \nabla^2 + V_h + V_c, \quad (1)$$

$$V_h(r) = -\frac{Z\alpha}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \theta(R-r) - \frac{Z\alpha}{r} \theta(r-R);$$

$V_c(r) = V\theta(R-r)$; μ — приведенная масса; α — постоянная тонкой структуры; $\theta(x)$ — тэта-функция. В работе [3] показано, что волновые функции легких пионных атомов можно рассчитать, используя стандартную теорию возмущений (ТВ) Релея — Шредингера. Она в данном случае эквивалентна борновскому приближению искаженных волн в теории рассеяния, и условием ее применимости является выполнение неравенства $\beta = \mu VR^2 \ll 1$.

Таким образом, волновую функцию основного состояния легкого пионного атома находим с помощью предложенного в [4, 5] аналитического метода учета эффектов короткодействующих потенциалов в водородоподобных системах. Выделим в (1) гамильтониан водородоподобного атома с кулоновским потенциалом и будем рассматривать оставшуюся часть как возмущение. Тогда, воспользовавшись результатом работ [4, 5], получаем, что с точностью до членов порядка β^2 , $\beta\lambda$ (здесь ZR/a_0 , a_0 — борровский радиус) волновая функция $\psi(r)$ при $Zr/a_0 \ll 1$:

$$\begin{aligned} \psi(r) = & \left\{ 1 + \left[\beta \left(-1 + \frac{x^2}{3} \right) + \lambda \left(-\frac{3}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20} \right) + \right. \right. \\ & + \beta \lambda \left(\frac{107}{180} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{20} - \frac{13x^6}{1260} + \frac{4}{3} \ln 2\lambda \right) + \beta^2 \left(\frac{5}{6} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{30} \right) \right] \theta(R-r) + \left[-\beta \frac{2}{3x} - \lambda \left(\frac{1}{5x} + x \right) + \beta \lambda \left(-\frac{2}{3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{48}{35x} + \frac{4}{3} \ln 2\lambda \right) \right] \theta(r-R) + \left(-\frac{4}{3} \gamma - 2 \right) \beta \lambda \right\} \psi^{(h)}(0), \quad (2) \end{aligned}$$

где $x=r/R$; γ — постоянная Эйлера; $\psi^{(h)}(0)$ — значение нерелятивистской кулоновской волновой функции 1s-состояния при $r=0$. Из (2) следует, что сильное взаимодействие и конечные размеры ядра «исправляют» поведение функции $\psi(r)$ на малых расстояниях: при $r < R$ в ней отсутствуют нечетные степени r , которые присутствуют в разложении кулоновской волновой функции из-за сингулярности кулоновского потенциала.

Приведем также выражение для вероятности нахождения пиона внутри ядра

$$P = 4\pi \int_0^R dr r^2 |\psi(r)|^2.$$

С помощью (2) легко показать, что

$$\begin{aligned} P = & \frac{4}{3} \lambda^3 \left\{ 1 - \frac{72}{35} \lambda - \frac{8}{5} \beta + \frac{8}{3} \left(\ln 2\lambda + \frac{8}{3} \gamma - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{136}{135} \right) \beta \lambda + \frac{204}{105} \beta^2 \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Сравнение значений $\psi(0)$ (в единицах $\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2}$) и P

Ядра	R (Ф)	$\psi(0)$ (2)	$\psi(0)$ [6]	$\psi(0)$ [8]	P (3)	P [6, 7]	P [8]
${}^6\text{Li}$	2,36	1,43	1,46	1,53	0,0035	0,0035	0,0038
	2,97	1,53	1,53	1,62	0,0073	0,0075	0,0083
${}^7\text{Li}$	2,49	1,37	1,42	1,49	0,0038	0,0038	0,0043
	2,97	1,44	1,42	1,53	0,0068	0,0068	0,0076
${}^9\text{Be}$	2,70	1,36	1,39	1,49	0,0107	0,0110	0,0132
	2,84	1,35	1,39	1,52	0,0125	0,0135	0,0157
${}^{10}\text{B}$	2,80	1,25	1,35	1,47	0,0202	0,023	0,0276
	3,07	1,24	1,32	1,49	0,0259	0,0304	0,0369
${}^{11}\text{B}$	2,89	1,19	1,29	1,42	0,0207	0,023	0,0289
	3,29	1,24	1,30	1,50	0,0311	0,365	0,0455
${}^{12}\text{C}$	2,98	1,30	1,41	1,53	0,0473	0,049	0,0606
	3,12	1,32	1,36	1,54	0,0516	0,0565	0,0697
${}^{14}\text{N}$	3,13	1,14	1,30	1,46	0,0592	0,078	0,102
	3,16	1,14	1,23	1,46	0,0608	0,0789	0,104
${}^{16}\text{O}$	3,28	1,16	1,33	1,51	0,0966	0,134	0,179
	3,41	1,18	1,26	1,50	0,1109	0,150	0,199
${}^{19}\text{F}$	3,47	0,96	1,20	1,43	0,1005	0,182	0,269
	3,57	0,97	1,13	1,43	0,1077	0,200	0,290
${}^{23}\text{Na}$	3,70	0,74	1,08	1,38	0,0835	0,307	0,523
${}^{24}\text{Mg}$	3,75	0,85	1,12	1,43	0,1416	0,438	0,733

В таблице даны значения $\psi(0)$, P , рассчитанные по формулам (2), (3) и найденные в [6, 7] численным решением уравнения Шредингера. Для каждого атома результаты в первой и второй строках получены соответственно при значениях R , вычисленных по формуле $R=1,3 A^{1/3}F$ и определенных из экспериментов по рассеянию электронов на ядрах. Значения V взяты из работ [6, 7]. Для атомов с $A \leq 16$ результаты расчетов, проведенных с помощью аналитических выражений (2), (3), хорошо согласуются с результатами численных расчетов. С ростом A увеличиваются β и λ , и, следовательно, эффективность применения ТВ уменьшается, так как при этом необходимо учитывать все большее количество членов ряда ТВ. Тем не менее, даже в случае ^{18}O первые два порядка ТВ дают значение $\psi(0)$ с точностью до $\sim 10\%$.

Приведенные в таблице значения $\psi(0)$ и $\bar{P}$ получены Мандельцвейгом [8] в рамках предложенной им в качестве альтернативы численным расчетам «теории возмущений по радиусу». Согласно [8],

$$|\psi\rangle = |\psi^{(k)}\rangle - \frac{\langle \psi^{(k)} | \bar{V} | \varphi_0 \rangle}{\Delta E} + G_0 \bar{V} | \varphi_0 \rangle, \quad (4)$$

где φ_0 — волновая функция свободной частицы с нулевой энергией; G_0 — функция Грина свободной частицы; ΔE — разность между точным и кулоновским значениями энергии пионного атома; $\bar{V}$ — короткодействующий внутренний потенциал (кор). Для пионных атомов роль кора играют эффекты конечных размеров ядра и сильного взаимодействия.

Если пренебречь поправками второго порядка ТВ к величине энергетического сдвига ΔE , можно показать, что, в силу короткодействующего характера потенциала $\bar{V}$, соотношение (4) есть уравнение для нахождения волновой функции по стандартной ТВ с точностью до членов первого порядка по параметрам β и λ . Поскольку уравнение (4) не учитывает отрицательного вклада в $\psi(0)$ и P членов, пропорциональных $\beta\lambda$, в частности оно не содержит характерного для кулоновского потенциала логарифмического слагаемого, то значения $\psi(0)$ и P по величине больше, чем значения $\psi(0)$ и P , найденные по формулам (2), (3) и определенные численно. Стандартная ТВ имеет ряд преимуществ перед «ТВ по радиусу». Она позволяет получать простые выражения для волновых функций с учетом всех характеризующих взаимодействие параметров, в то время как уравнение (4) содержит энергетический сдвиг ΔE , который должен быть определен независимо.

В заключение отметим, что рассмотренный в работе метод расчета волновой функции 1s-состояния легких пионных атомов может быть использован для учета влияния сильного взаимодействия мезонов на свойства $(\pi\pi)$, (πK) -димезоатомов, в частности для вычисления значения $\psi(0)$, которое играет важную роль при определении времени жизни этих атомов [9].

Список литературы

1. Ким Е. Мезонные атомы и ядерная структура. М., 1975.
2. Кириллов-Угрюмов В. Г., Никитин Ю. П., Сергеев Ф. М. Атомы и мезоны. М., 1980.
3. Борисоглебский Л. А., Кузир П. Г., Трофименко Е. Е. // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25. № 2. С. 132.
4. Borisoglebsky L. A., Trofimenko E. E. // Phys. Lett. 1979. V. 81B. N 2. P. 175.
5. Trofimenko E. E. Ibid. V. 73A. N 5. 6. P. 383.
6. Fulcher L. P., Eisenberg J. M., Le Tourneux J. // Canad. Journ. Phys. 1967. V. 45. N 10. P. 3313.
7. Seki R., Cromer A. H. // Phys. Rev. 1967. V. 156. N 1. P. 93.
8. Mandelzweig V. B. // Nucl. Phys. 1977. V. A292. N 3. P. 333.
9. Неменов Л. Л. // ЯФ. 1985. Т. 41. № 4. С. 980.

Поступила в редакцию 09.12.86.