

2. Бэм Я., Выскочил С., Завада П., Крумштейн З. В., Монич Е. А., Муравьев Б. А., Ронжик А. К., Харчилава А. И., Шафарик К., Цисек З. // ПТЭ. 1981. № 5. С. 55.

3. Петржак К. А., Бак М. А. // ЖТФ. 1955. Т. 25. С. 636.

Поступила в редакцию 27.10.87

УДК 517.916

О. А. КОНОНОВА

ОБ ИЗОХРОННОСТИ ЦЕНТРА ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Рассматривается система нелинейных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= -x + c_0 x^2 + d_0 x^3 + l_0 x^4 + y(b_1 x + c_1 x + d_1 x^3) + \\ &+ y^2(a_2 + b_2 x + c_2 x^2) + y^3(a_3 + b_3 x) + a_4 y^4. \end{aligned} \quad (1)$$

Для системы (1) И. С. Куклесом найдены необходимые и достаточные условия, при которых точка $O(0, 0)$ является центром. Этих условий девять [1]. Изохронность центра $(0, 0)$ в случаях I—IV показана в [2].

В данной заметке рассматривается вопрос об изохронности центра в 8-м случае центра, когда $a_4 = a_3 = a_2 = c_0 = c_1 = l_0 = 0$. Система (1) в 8-м случае центра имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= -x + d_0 x^3 + y(b_1 x + d_1 x^3) + y(b_2 x + b_3 xy). \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема. Система (2) изохронна только в случае $d_0 = -\frac{1}{9} b_1^2$; $d_1 = b_2 = b_3 = 0$ и в линейном случае.

Чтобы начало координат было изохронным центром, необходимо и достаточно существования голоморфного в окрестности $(0, 0)$ преобразования:

$$u = x + \sum_{i+j \geq 2}^{\infty} \alpha_{ij} x^i y^j; \quad v = y + \sum_{i+j \geq 2}^{\infty} \beta_{ij} x^i y^j,$$

переводящего систему (2) в систему

$$\frac{du}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} = -u. \quad (3)$$

Непосредственные вычисления дают следующие необходимые условия изохронности:

1. $b_1^2 + 3b_2 + 9d_0 = 0$;
2. $6b_1 d_1 + 6b_1 b_3 + 9b_2 d_0 + 18b_1^2 d_0 + 9b_1^2 b_2 + 2b_1^4 + 9b_2^2 = 0$;
3. $18b_2 d_1 + 12b_1^2 d_1 + 2b_1^2 b_3 + 3b_3 b_2 = 0$; (4)
4. $\frac{7}{60} b_1 d_1 d_0 - \frac{157}{36} b_1 b_2 d_1 - \frac{197}{60} b_1^3 d_1 + \frac{214}{15} b_1^2 d_0^2 + \frac{1783}{45} b_1^2 b_2 d_0 +$
 $+ \frac{2}{135} b_1^3 b_3 + \frac{12166}{945} b_1^4 d_0 + \frac{12077}{1620} b_1^4 b_2 + \frac{911}{72} b_1^2 b_2^2 + \frac{508}{405} b_1^6 +$
 $+ \frac{69}{15} b_1 b_3 d_0 + \frac{135}{8} b_2^2 d_0 + \frac{35}{4} b_2 d_0^2 + \frac{4}{3} b_1 b_2 b_3 + \frac{113}{24} b_2^3 = 0$.

Если $b_1 = 0$, тогда $b_2 = d_0 = 0$ и система (2) имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -x + d_1 x^3 y + b_3 x y^3. \quad (5)$$

Для системы (5) получены необходимые условия изохронности:

$$\begin{aligned} 1. \quad & 3b_3 - 7d_1^2 + 4b_3d_1 = 0; \\ 2. \quad & 52218121b_3^3d_1 + 5314113540b_3^2d_1^2 + 150666319b_3d_1^3 + \\ & + 144503597b_3^4 + 1886943d_1^4 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из условий (6) вытекает, что $d_1 = b_3 = 0$, т. е. получается линейный случай.

Пусть $b_1 \neq 0$; 3-е условие (4) можно представить в виде: $(2b_1^2 + 3b_2)(b_3 + 6d_1) = 0$. Если $b_1 \neq 0$, тогда $2b_1^2 + 3b_2 \neq 0$ и $b_3 + 6d_1 = 0$;

$b_3 = -6d_1$; $d_1 = \frac{(3b_2^2 + b_1^2b_2)}{15b_1}$; $b_3 = \frac{-2(3b_2^2 + b_1^2b_2)}{5b_1}$. Подставляя эти результаты в 4-е условие (4), получим: $b_2 = 0$; $b_3 = 0$; $d_1 = 0$; $d_0 = -\frac{1}{9}b_1^2$. Система (2) в этом случае имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -x + b_1xy - \frac{1}{9}b_1^2x^3. \quad (7)$$

Систему (7) можно проинтегрировать и найти период системы $T(c) = 2\pi$. Покажем это. Уравнение интегральных кривых систем (7) имеет вид:

$$y^2 - \frac{2}{3}b_1y\zeta - \frac{y}{c} + \frac{b_1}{6c}\zeta + \frac{b_1^2}{9}\zeta^2 = 0, \quad (8)$$

где $\zeta = x^2 + \frac{9}{b_1^2}$.

Точки пересечения интегральных кривых (8) с осью x -ов:

$$y = 0; \quad x_{1,2} \pm \sqrt{-\frac{9}{b_1^2} - \frac{3}{2b_1c}}; \quad b_1c < 0.$$

Тогда вследствие симметрии системы относительно оси y -ов

$$T(c) = 2 \int_0^{x_1} \frac{dx}{y_1} - 2 \int_0^{x_1} \frac{dx}{y_2}, \quad (9)$$

где y_1, y_2 — корни уравнения (8).

$$\begin{aligned} T(c) = 12c & \int_0^{\sqrt{-\frac{9}{b_1^2} - \frac{3}{2b_1c}}} \frac{dx}{2b_1c\left(x^2 + \frac{9}{b_1^2}\right) + 3 + \sqrt{9 + 6b_1c\left(x^2 + \frac{9}{b_1^2}\right)}} - \\ & - 12c \int_0^{\sqrt{-\frac{9}{b_1^2} - \frac{3}{2b_1c}}} \frac{dx}{2b_1c\left(x^2 + \frac{9}{b_1^2}\right) + 3 - \sqrt{9 + 6b_1c\left(x^2 + \frac{9}{b_1^2}\right)}}. \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления интегралов дают результат $T(c) = 2\pi$. Итак, система (7) изохронна.

Список литературы

1. Куклес И. С. // Докл. АН СССР. 1944. Т. 57. № 4. С. 166.
2. Кононова О. А. // Тез. докл. 5-й Республ. конференц. матем. Белоруссии. Гродно, 1980. Ч. 2. С. 54.
3. Воробьев А. П. // Докл. АН БССР. 1958. Т. 7. № 3. С. 155.

Поступила в редакцию 24.02.88.