взвешенными числами $\{1, \ldots, R\}$. Будем считать, что появление каждого графа из $A_{n, R}$ равновероятно. Это эквивалентно тому, что вероятность p_ν появления ребра с весом $\nu \in \{1, \ldots, R\}$ в любом графе $G \in A_{n, R}$ равна $(R+1)^{-1}$.

Пусть $A^{\xi}_{n, R}$ — множество всех графов из $A_{n, R}$, обладающих свойством ξ. Будем говорить, что почти все графы из $A_{n, R}$ обладают свойством ξ, если существует такая монотонная функция $\psi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, что справедливо соотношение: $\lim\limits_{n \to \infty} |A^{\xi}_{n, R}| / |A_{n, R}| = 1$, $\forall R \leqslant \psi(n)$. Отсюда и из лемм 1, 2 вытекает

Теорема. Если $W_n = \{h : n$ кратно h, $2 \leqslant h \leqslant \sqrt{n/\ln n}\}$, $h_0 = \max\limits_{h \in W_n} h$, $R \leqslant \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{n}{h \ln \ln n}} - 1$, $2 \leqslant \gamma \leqslant \sqrt[4]{n}$, то для почти всех графов $G \in A_{n, R}$, $n \in M$, $M = \{n > 3,\ W_n \neq \varnothing\}$ алгоритм α строит h_0-покрытие, оптимальное по каждому из критериев $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, т.е. $|X^0| = 1$.

Учитывая результат работы [6], касающийся сложности решения задачи выделения максимального паросочетания в двудольном графе $O(\sqrt{n^5})$, легко показать, что трудоемкость алгоритма α составляет $O(\sqrt{n^5}/\gamma h^{1/2})$ операций.

Список литературы

1. Шунгаров Х. Д. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3. С. 47..
2. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
3. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М., 1982.
4. Перепелица В. А. // Кибернетика. 1984. № 4. С. 62.
5. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев, 1985.
6. Hopcroft J. E., Karp R. M. // SIAM. Journ. Comput. 1979. № 2. P. 225.
7. Перепелица В. А. // Управляемые системы. Новосибирск, 1969. Вып. 2. С. 45.

Поступила в редакцию 04.12.87.

УДК 519.10

А. Н. ИСАЧЕНКО, МУХИБУЛЛА АБДУЛЛА

ГРАНИ МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО БУЛЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Многогранник задачи квадратичного булевого программирования (КБП-многогранник) $\mathrm{CH}(M_n)$ есть выпуклая оболочка в $R^{n \times n}$ множества матриц:

$$M_n = \{X \in \{-1, 1\}^{n \times n} \mid x_{ij} = x_{ii} \cdot x_{jj},\ i \neq j\}.$$

Он был введен в рассмотрение в работе [1], где исследованы его основные свойства. В частности, показано, что $\mathrm{vert}\,\mathrm{CH}(M_n) = M_n$, $\dim \mathrm{CH}(M_n) = n(n+1)/2$, $\mathrm{diam}\,\mathrm{CH}(M_n) = 1$, $0_{n \times n} \in \mathrm{relint}\,\mathrm{CH}(M_n)$.

В настоящей статье приводятся тривиальные справедливые неравенства для $\mathrm{CH}(M_n)$ и исследуются его гиперграни (собственные грани максимальной размерности). Необходимые для понимания статьи определения и результаты из теории многогранников можно найти в [2, 3].

Пусть A — $(n \times n)$-матрица, c — $(n+1)$-вектор, b — скаляр. Введем следующие обозначения:

$$(A, b) = \Big\{X \in R^{n \times n} \mid \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij} x_{ij} = b\Big\},$$

$$F(A, b) = \Big\{X \in \mathrm{CH}(M_n) \mid \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij} x_{ij} = b\Big\},$$

$$A_0(c)=\begin{vmatrix} c_1 a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{11} c_2 \cdots a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1} a_{n2} \cdots c_{n+1} \end{vmatrix},$$

$$A_i(c)=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots a_{1i-1} & c_1 & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i-11} & \cdots a_{i-1i-1} & c_{i-1} & a_{i-1i} & \cdots a_{i-1n} \\ c_1 & \cdots c_{i-1} & c_i & c_{i+1} & \cdots c_{n+1} \\ a_{i1} & \cdots a_{ii-1} & c_{i+1} & a_{ii} & \cdots a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots a_{ni-1} & c_{n+1} & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad i=\overline{1,\ n+1}.$$

Ниже нам понадобится

Утверждение 1 [1]. Если $F(A,\ b)$ — гипергрань многогранника $\mathrm{CH}(M_n)$, $n\geqslant 2$, то $a_{ij}\neq 0$ хотя бы для одной пары индексов $(i,\ j)$, $i<j$.

Многогранник $\mathrm{CH}(M_n)$ содержится в кубе $\{X\in R^{n\times n}\,|\,x_{ij}=x_{ji},\ 1\leqslant i<j\leqslant n;\ -1\leqslant x_{ij}\leqslant 1,\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$ и поэтому каждое неравенство куба является справедливым для $\mathrm{CH}(M_n)$.

Теорема 1. Для $n\geqslant 2$ каждое неравенство $x_{ij}\leqslant 1$ $(-x_{ij}\leqslant 1)$, $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$, определяет $n(n-1)/2$-мерную грань $\mathrm{CH}(M_n)$, которая является многогранником $\mathrm{CH}(M_{n-1})$.

Доказательство. Через $E_n(i,\ j)$ обозначим $(n\times n)$-матрицу только с одним ненулевым элементом $x_{ij}=1$, где $i\leqslant j$. Тогда $(E_n(i,\ j),\ 1)$ — опорная гиперплоскость для $\mathrm{CH}(M_n)$ и, следовательно, $F(E_n(i,\ j),\ 1)$ — грань $\mathrm{CH}(M_n)$. Покажем, что $\dim F(E_n(i,\ j),\ 1)=n(n-1)/2$. Предположим $i<j$. Любая матрица $X\in F(E_n(i,\ j),\ 1)$ должна удовлетворять следующей неприводимой системе n линейных уравнений:

$$\begin{gathered} x_{ij}=1,\ x_{ii}=x_{jj},\ x_{ki}=x_{kj},\ k=\overline{1,\ i-1}, \\ x_{ii+p}=x_{i+pj},\ p=\overline{1,\ j-i-1},\ x_{ij+k}=x_{jj+k},\ k=\overline{1,\ n-j}, \end{gathered} \tag{1}$$

поэтому $\dim F(E_n(i,\ j),\ 1)\leqslant n(n-1)/2$. Пусть $K_n(i_1,\ i_2;\cdots;\ i_{2s-1}\ i_{2s})$ — множество матриц из M_n с элементами $x_{i_{2l-1}i_{2l}}=1$, $l=\overline{1,\ s}$. Множество $n(n-1)/2+1$ матриц $\frac{1}{2^{n-1}}\sum\limits_{K_n(i,\ j)}X$; $\frac{1}{2^{n-2}}\sum\limits_{K_n(i,\ j;\ i,\ i;\ j,\ j)}X$; $\frac{1}{2^{n-2}}\times\sum\limits_{K_n(i,\ j;\ k,\ p)}X$, $k,\ p\neq i,\ j$, $k\leqslant p$; $\frac{1}{2^{n-2}}\sum\limits_{K_n(i,\ j;\ k,\ i;\ k,\ j)}X$, $k=\overline{1,\ i-1}$; $\frac{1}{2^{n-2}}\sum\limits_{K_n(i,\ j;\ i,\ i+p;\ i+p,\ j)}X$, $p=\overline{1,\ j-i-1}$; $\frac{1}{2^{n-2}}\sum\limits_{K_n(i,\ j;\ i,\ j+k;\ j,\ j+k)}X$, $k=\overline{1,\ n-j}$, является аффинно независимым. Следовательно, $\dim F(E_n(i,\ j),\ 1)=n(n-1)/2$ и в силу (1) многогранник $F(E_n(i,\ j),\ 1)$ в подпространстве, определяемом пересечением гиперплоскостей (1), есть $\mathrm{CH}(M_n)$. Случаи $i=j$ и $-x_{ij}\leqslant 1$ доказываются аналогично.

Грань $F(B,\ b)$ многогранника $\mathrm{CH}(M_{n+1})$ называем подъемом грани $F(A,\ b)$ многогранника $\mathrm{CH}(M_n)$, если $B=A_i(c)$ для некоторого $0\leqslant i\leqslant n+1$ и некоторого $(n+1)$-вектора c. (Относительно подъема граней многогранника см., например, [4]). Будем называть гипергрань многогранника $\mathrm{CH}(M_{n+1})$ L-гипергранью, если она является подъемом некоторой гиперграни многогранника $\mathrm{CH}(M_n)$. В противном случае называем гипергрань NL-гипергранью. Следующая теорема дает конструктивное описание всех L-гиперграней $\mathrm{CH}(M_n)$.

Теорема 2. Пусть $F(A, b)$ — гипергрань многогранника $\mathrm{CH}(M_n)$, $n \geqslant 2$; $F(A_i(c), b)$ является гипергранью многогранника $\mathrm{CH}(M_{n+1})$ тогда и только тогда, когда $c = 0$.

Доказательство. Пусть $F(A_i(c), b)$ является гипергранью $\mathrm{CH}(M_{n+1})$ и подъемом гиперграни $F(A, b)$. Так как $0_{n \times n} \in \mathrm{relint}\,\mathrm{CH}(M_n)$, среди вершин гиперграни $F(A, b)$ найдется $k = (n+1)n/2$ линейно независимых, обозначим их $X^1, X^2, \ldots, X^k$. В силу утверждения 1, определитель матрицы

$$D = \begin{vmatrix} x_{11}^1 \cdots x_{nn}^1 b x_{12}^1 \cdots x_{i-1j}^1 x_{i+1j}^1 \cdots x_{n-1n}^1 \\ x_{11}^2 \cdots x_{nn}^2 b x_{12}^2 \cdots x_{i-1j}^2 x_{i+1j}^2 \cdots x_{n-1n}^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{11}^k \cdots x_{nn}^k b x_{12}^k \cdots x_{i-1j}^k x_{i+1j}^k \cdots x_{n-1n}^k \end{vmatrix}$$

отличен от нуля для некоторой пары индексов $i < j$. Следовательно, существует хотя бы один отличный от нуля минор порядка $n+1$ у подматрицы, образованной $n+1$ первыми столбцами матрицы D. Пусть это минор

$$\begin{vmatrix} x_{11}^1 & x_{22}^1 & \cdots x_{nn}^1 b \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{11}^{n+1} & x_{22}^{n+1} & \cdots x_{nn}^{n+1} b \end{vmatrix}.$$

Предположим, что $d^j = (x_{11}^j, \ldots, x_{i-1i-1}^j, 1, x_{ii}^j, \ldots, x_{nn}^j)$. Тогда $X_i^j(d^j), X_i^j(-d^j) \in \in \mathrm{vert}\,\mathrm{CH}\,(M_{n+1})$. Следовательно, $\frac{1}{2} X_i^j(d^j) + \frac{1}{2} X_i^j(-d^j) = X_i^j(0) \in \in \mathrm{CH}\,(M_{n+1})$. Легко проверить, что $X_i^j(0) \in F(A_i(c), b)$. Так как $\mathrm{diam}\,\mathrm{CH}\,(M_{n+1}) = 1$, то отрезок $[X_i^j(d^j), X_i^j(-d^j)]$ является ребром многогранника $\mathrm{CH}\,(M_{n+1})$ и, имея общую точку $X_i^j(0)$ с $F(A_i(c), b)$, он весь принадлежит $F(A_i(c), b)$. Поэтому $X_i^j(d^j) \in F(A_i(c), b)$, $j = \overline{1, n+1}$. Следовательно, для компонент вектора c мы получаем систему линейных уравнений:

$$c_1 x_{11}^1 + \ldots + c_{i-1} x_{i-1i-1}^1 + c_i + c_{i+1} x_{ii}^1 + \ldots + c_{n+1} x_{nn}^1 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1 x_{11}^{n+1} + \ldots + c_{i-1} x_{i-1i-1}^{n+1} + c_i + c_{i+1} x_{ii}^{1+n} + \ldots + c_{n+1} x_{nn}^{n+1} = 0$$

с единственным решением $c_i = 0$, $i = \overline{1, n+1}$.

Докажем *достаточность*. $(A_i(0), b)$ является опорной гиперплоскостью для $\mathrm{CH}(M_{n+1})$ и, следовательно, $F(A_i(0), b)$ — грань многогранника $\mathrm{CH}(M_{n+1})$. Предположим, что $\dim F(A_i(0), b) < (n+1)n/2 - 1$. Тогда существует гипергрань $F(B, b)$ многогранника $\mathrm{CH}(M_{n+1})$ такая, что $F(A_i(0), b) \subset F(B, b)$. Так как для любой матрицы $X \in F(A, b)$ мы имеем $X_i(0) \in F(A_i(0), b)$, то $X_i(0) \in F(B, b)$. Далее, $F(A, b)$ — гипергрань $\mathrm{CH}(M_n)$ и, следовательно, среди ее вершин найдутся $n(n+1)n/2$ линейно независимых, что влечет $B = A_i(c)$. Тогда, по необходимости, $c = 0$ и $F(B, b) = F(A_i(0), b)$, что и доказывает достаточность.

Теорема 3. Для $n \geqslant 2$ каждое из неравенств $x_{ij} + x_{ik} - x_{h-j+ik} \leqslant 1$, $x_{ij} - x_{ik} + x_{h-j+ik} \leqslant 1$, $-x_{ij} + x_{ik} + x_{h-j+ik} \leqslant 1$, $-x_{ij} - x_{ik} - x_{h-j+ik} \leqslant 1$, $1 \leqslant \leqslant i \leqslant j < k \leqslant n$, определяет гипергрань многогранника $\mathrm{CH}(M_n)$.

Доказательство. Легко проверить, что для $n = 2$ каждое из неравенств дает NL-гипергрань. Для $n \geqslant 3$ теорема вытекает из теоремы 2.

Замечание. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для $\mathrm{CH}(M_3)$ теорема 3 дает полную неприводимую систему линейных неравенств, т. е. $\mathrm{CH}(M_3)$ определяется 16 L-гипергранями.

Предположим, что $\omega = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ и $\min \omega = \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} \{i_j\}$.

Теорема 4. Для $n \geqslant 4$ каждое из неравенств $(|\omega|-3)\sum_{p\in\omega} x_{pp-l} - \sum_{\substack{p,\,j\in\omega\\ p<j}} x_{pj-l} \leqslant 1+(\omega-2)(\omega-3)/2$, $\forall\omega\subseteq\{1, 2, \dots, n\}$, $|\omega|\geqslant 4$, $\forall 0\leqslant l<\min\omega$; $-(|\omega|-3)\sum_{p\in\omega} x_{pp-l} - \sum_{\substack{p,\,j\in\omega\\ p\leqslant j}} x_{pj-l} \leqslant 1+(\omega-2)(\omega-3)/2$, $\forall\omega\subseteq\{1, 2, \dots, n\}$, $|\omega|\geqslant 4$, $\forall 0\leqslant l<\min\omega$;
$(|\omega|-3)\left(\sum_{\substack{p\in\omega\\ p\leqslant i}} x_{pi-l}+\sum_{\substack{p\in\omega\\ p>i}} x_{i-lp}\right)-\sum_{\substack{p,\,j\in\omega\\ p,\,j\neq i\\ p<j}} x_{pj-l}\leqslant 1+(\omega-2(\omega-3)/2$, $\forall\omega\subseteq\{1, 2, \dots, n\}$, $|\omega|\geqslant 4$, $\forall i\in\omega$, $\forall 0\leqslant l<\min\omega$; $-(|\omega|-3)\times\left(\sum_{\substack{p\in\omega\\ p\leqslant i}} x_{pi-l}+\sum_{\substack{p\in\omega\\ p>i}} x_{i-lp}\right)-\sum_{\substack{p,\,j\in\omega\\ p,\,j\neq i\\ p\leqslant j}} x_{pj-l}\leqslant 1+(\omega-2)(\omega-3)/2$, $\forall\omega\subseteq\{1, 2, \dots, n\}$, $|\omega|\geqslant 4$, $\forall i\in\omega$, $\forall 0\leqslant l<\min\omega$ определяет гипергрань многогранника $CH(M_n)$.

В силу теоремы 2 для доказательства теоремы достаточно показать ее справедливость при $|\omega|=n$. Проведем доказательство для первого неравенства, которое имеет вид $(n-3)\sum_{1\leqslant p\leqslant n} x_{pp}-\sum_{1\leqslant p<j\leqslant n} x_{pj}\leqslant 1+(n-2)\times(n-3)/2$. Легко проверить, что оно является справедливым для $CH(M_n)$. Множество $n(n+1)/2$ аффинно независимых матриц, удовлетворяющих ему как равенству, составляют матрицы из M_n с одним или двумя элементами главной диагонали, равными -1.

Доказательство для остальных неравенств теоремы проводится аналогично.

Замечание. Отметим, что при $|w|=n$ каждое из неравенств теоремы 4 определяет NL-гипергрань многогранника $CH(M_n)$.

Обозначим через $f(CH(M_n))$ число гиперграней многогранника $CH(M_n)$.

Теорема 5. $f(CH(M_n))\geqslant 2(n+1)!\left(\sum_{i=0}^{n-3}\frac{1}{(n-i)!}+\frac{1}{6}\right)$ при $n\geqslant 3$.

Доказательство. Из теорем 2—4 вытекает следующее соотношение:

$$f(CH(M_n))\geqslant(n+1)\,[f(CH(M_{n-1}))+2],$$

что влечет

$$f(CH(M_n))\geqslant 2(n+1)!\left(\sum_{i=0}^{n-5}\frac{1}{(n-i)!}\right)+(n+1)!\,\frac{f(CH(M_3))}{4!}.$$

Отсюда по замечанию к теореме 3 получаем требуемое неравенство.

Список литературы

1. Исаченко А. Н., Мухибулла Абдулла // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3. С. 68.
2. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
3. The Traveling Salesman Problem. A Guided Tour of Combinatorial Optimization. New York, 1985.
4. Гришухин В. П. // Optimization. 1986. V. 17. № 4. P. 487.

Поступила в редакцию 14.01.88.