

Предложенная в данной статье математическая модель и алгоритм применимы при синтаксическом анализе проективных и слабо проективных предложений, характерных для научной и деловой прозы.

Список литературы

1. Гладкий А. В. Синтаксические структуры естественного языка в автоматизированных системах общения. М., 1985.
2. Попов Э. В. Общение с ЭВМ на естественном языке. М., 1982.
3. Ляпницкий С. Ф., Яковичин В. С. // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. 1987. № 4.

Поступила в редакцию 27.10.87.

УДК 519.8

Х. Д. ШУНГАРОВ

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ ГРАФА ЗВЕЗДАМИ

Ранее рассматривалась трехкритериальная задача покрытия взвешенного полного графа звездами и был предложен точный алгоритм ее решения [1]. В данной работе исследуется двухкритериальная задача покрытия произвольного взвешенного графа звездами, которая состоит в следующем: задан n -вершинный неориентированный граф $G = (V, E)$, каждое ребро $e = (i, j)$ которого взвешено числом $w(e) = a_{ij}$, $a_{ij} \in \{1, 2, \dots, R\}$. Напомним, что h -звездой называется полный двудольный граф $K_{1, h-1}$. Пусть $W_n = \{h : h \in N_n\}$, n кратно h , где $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Покрытием графа $G = (V, E)$ h -звездами (h -покрытием) будем называть его остовный подграф $x = (V, E_x)$, $E_x \subseteq E$, каждая компонента связности которого представляет собой h -звезду, $h \in W_n$ [1].

На множестве $X = \{x\}$ всевозможных h -покрытий, $h \in W_n$, зададим векторную целевую функцию ВЦФ $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$, частные критерии которой $F_k(x) \rightarrow \min$, $k = 1, 2$, имеют вид: $F_1(x) = \frac{1}{n - |x|} \sum_{e \in E_x} w(e)$,

$F_2(x) = |x|$, где $|x|$ — число звезд в покрытии x . Тем самым критерий $F_1(x)$ — удельный вес покрытия x . ВЦФ $F(x)$ определяет на X паретовское множество $\tilde{X} \subseteq X$ или множество эффективных альтернатив [2, 3].

Задача состоит в построении алгоритма нахождения так называемого полного множества альтернатив (ПМА). ПМА определяется как такое минимальное по мощности подмножество $X^0 \subseteq X$, что $F(X^0) = F(\tilde{X})$, где $F(X^*) = \{F(x) : x \in X^*\}$, $\forall X^* \subseteq X$ [4].

Среди возможных подходов к решению этой задачи наиболее естественным представляется использование локальных алгоритмов и процедур [5].

В настоящей работе найдены ограничения на параметры задачи, при которых мощность ПМА X^0 почти всегда равна единице. При этих условиях разработан статистически эффективный алгоритм построения такого ПМА, который состоит в следующем.

Алгоритм α начинает свою работу с разбиения графа G на γ подграфов $G_k = (V_k, E_k)$, $k = \overline{1, \gamma}$, затем вычисляется число $N = \frac{n}{h}$ звезд в покрытии x , величина $v = \left\lceil \frac{N}{\gamma} \right\rceil$ и определяется мощность $|V_k| = v h$ для $k = \overline{1, l}$ и $|V_k| = (v + 1) h$ для $k = \overline{l + 1, \gamma}$, где $l = (v + 1) \gamma - N$.

Алгоритм α состоит из этапов α_1 и α_2 . Этап α_1 состоит из γ подэтапов α_1^k , $k = \overline{1, \gamma}$. Для $k = \overline{1, l}$ ($k = \overline{l + 1, \gamma}$) подэтап α_1^k состоит из $v(v + 1)$ шагов $s = \{1, \dots, v\}$ ($s = \{1, \dots, v + 1\}$). Результатом шага s является r -звезда, покрывающая вершины множества V_k . Каждый из таких

шагов s состоит из r подшагов, перенумерованных числами $t = 1, \dots, r$. Первый подшаг шага s состоит в фиксировании непокрытой на предыдущих шагах вершины $i_0 \in V_k$, которая является центром очередной r -звезды, $r < h$. На каждом следующем подшаге $t \geq 2$ шага s выбирается ребро (i_0, i_t) такое, что $a_{i_0 i_t} = \min_{j \in \bar{V}_t} a_{i_0 j}$, где $\bar{V}_t$ — множество вершин $j \in V_k$, не покрытых звездами к началу подшага t шага s . Этап α_2 состоит из подэтапов α_2^k , $k = 1, \gamma$. Для $k = 1, l(k = l+1, \gamma)$ подэтап α_2^k состоит из $m = h - r$ шагов, перенумерованных числами $\tau = 1, \dots, m$.

Пусть $\tilde{V}_k$ — множество вершин, не покрытых r -звездами на подэтапе α_1^k , причем J_k — множество центров этих звезд.

Каждый подэтап α_2^k , $k = 1, l(k = l+1, \gamma)$ начинается с разбиения множества $\tilde{V}_k$ в порядке возрастания номеров вершин на m подмножеств $\tilde{V}_{k,\tau}$, $\tau = 1, \dots, m$, так, что $|\tilde{V}_{k,\tau}| = \nu h$ ($|\tilde{V}_{k,\tau}| = (\nu + 1)h$). Затем строятся последовательность двудольных подграфов $G_{k,\tau}$, $\tau = 1, \dots, m$, графа G , где для $k = 1, l(k = l+1, \gamma)$ $G_{k,\tau} = (J_k, \tilde{V}_{k+1,\tau}, E_{k,\tau})$ и $G_{l,\tau} = (J_l, \tilde{V}_{l+1,\tau}, E_{l,\tau})$ ($G_{\gamma,\tau} = (J_\gamma, \tilde{V}_{l+1,\tau}, E_{\gamma,\tau})$), $\tau = 1, \dots, m$. В каждом таком подграфе $G_{k,\tau}$ его множество ребер $E_{k,\tau}$ определяется на основе понятия «подграф графа G » и соответствующей парой долей этого двудольного подграфа. Шаг $\tau \in \{1, \dots, m\}$ начинается с того, что в множестве ребер $E_{k,\tau}$ для каждой вершины $i \in \tilde{V}_{k,\tau}$ отмечаем все инцидентные ей ребра $(i, j) \in E_{k,\tau}$, имеющие минимальный вес. Множество всех таких помеченных ребер обозначим через $\bar{E}_{k,\tau}$ и рассмотрим реберно-порожденный подграф $\bar{G}_{k,\tau} = (\tilde{V}_{k,\tau}, J_{k-1}, \bar{E}_{k,\tau})$, $\tau = 1, m$, двудольного 2ν -вершинного ($(2\nu + 2)$ -вершинного) графа $G_{k,\tau}$. Далее к двудольному графу $\bar{G}_{k,\tau}$ применяем алгоритм Хопкрофта — Карпа [6], который в $\bar{G}_{k,\tau}$ строит максимальное паросочетание. По окончании шага $\tau \in \{1, \dots, m\}$ каждое из помеченных ребер $(i, j) \in E_{k,\tau}$ присоединяется к инцидентному ему центру соответствующей r -звезды. По завершении шага m этапа α_2^k алгоритм α заканчивает свою работу.

Представленное описание алгоритма α дано для случая $l \neq \gamma - 1$. В случае $l = \gamma - 1$ алгоритм α отличается от представленного выше следующим. Перед началом подэтапа α_1^γ из подграфа G_γ вычленились $h - r$ вершин, которые не участвуют в работе алгоритма α вплоть до подэтапа α_2^γ . Эти $h - r$ вершин присоединяются к множеству непокрытых вершин подграфа G_1 . При этом в оставшемся подграфе графа G_1 на этапе α_1^γ строится $\nu + 1$ r -звезд, а на подэтапе α_2^γ — последовательность двудоль-

ных подграфов $G_{\gamma,\tau} = (J_\gamma, \tilde{V}_{l,\tau}, E_{k,\tau})$, где $|\tilde{V}_{l,\tau}| = |J_\gamma| = \nu + 1$, $\tau = 1, \dots, m$.

Теперь рассмотрим вероятностный n -вершинный граф G_n , в котором всякое ребро (i, j) веса $a_{ij} = \nu$, $\nu \in \{1, \dots, R\}$, появляется с вероятностью p_ν . Тем самым, если p_0 — вероятность не появления ребра (i, j) , то $\sum_{\nu=0}^R p_\nu = 1$. Пусть $q = p_0 + \sum_{\nu=2}^R p_\nu$, тогда $q = 1 - p_1$.

Звезду, каждое ребро которой имеет единичный вес, будем называть особой.

Лемма 1. Если $W_n = \{h : n \text{ кратно } h, 2 \leq h \leq \sqrt{n/\ln n}\}$, $p_1 \geq 2\gamma \sqrt{(h \ln \ln n)/n}$, $2 \leq \gamma \leq \sqrt{n}$, то вероятность $P_n^{(1)} \geq 1 - \delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Обозначим через $P_n^{(1)}$ вероятность того, что в результате работы этапа α_1 алгоритма α построены только особые r -звезды,

а через $P_s^{(t)}$ — вероятность того, что случайно выбранная на подшаге t шага s этапа α_1 вершина i_0 инцидентна t ребрам веса 1. Тогда имеем:

$$P_n^{(1)} = \left(\prod_{s=1}^v P_s^{(r-1)} \right)^l \left(\prod_{s=1}^{v+1} P_s^{(r-1)} \right)^{v-l}, \quad P_s^{(r-1)} = 1 - \sum_{t=0}^{r-2} P_s^{(t)}, \quad P_s^{(t)} = \binom{n_s}{t} p_1^t q^{n_s-t},$$

где $p_1 + q = 1$, $n_k^s = \left\lfloor \frac{n}{\gamma} \right\rfloor - (s-1)r$. Таким образом, получаем

$$P_n^{(1)} = \left(\prod_{s=1}^v \left(1 - \sum_{t=0}^{r-2} \binom{n_s}{t} p_1^t q^{n_s-t} \right) \right)^l \left(\prod_{s=1}^{v+1} \left(1 - \sum_{t=0}^{r-2} \binom{n_s}{t} p_1^t q^{n_s-t} \right) \right)^{v-l}.$$

Теперь можно показать, что $P_n^{(1)} \geq 1 - \delta_n$, где $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Действительно, с учетом условий леммы 1 и соотношения $n_k^s = \left\lfloor \frac{n}{\gamma} \right\rfloor - (s-1)r \geq \frac{n}{4\gamma}$, $r = [h/2]$, можно продолжить:

$$\begin{aligned} P_n^{(1)} &\geq \left(1 - \sum_{s=1}^v \frac{r-2}{((n_k^s+1)p_1 - (r-2))^2} \right)^l \left(1 - \sum_{s=1}^{v-1} \frac{r-2}{((n_k^s+1)p_1 - (r-2))^2} \right)^{v-l} \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{p_1} \int_1^{v-1} \frac{d((n_k^s+1)p_1 - (r-2))}{((n_k^s+1)p_1 - (r-2))^2} \right)^l \left(1 + \frac{1}{p_1} \int_1^{v+2} \frac{d((n_k^s+1)p_1 - (r-2))}{((n_k^s+1)p_1 - (r-2))^2} \right)^{v-l} \geq \\ &\geq 1 - \left(\frac{1}{\left(\frac{n}{4\gamma} p_1^2 - r p_1 \right)} \right)^l \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{n}{4\gamma} - r \right) p_1^2 - r p_1} \right)^{v-l} \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\left(\frac{n}{4\gamma} - r \right) p_1^2 - r p_1} \right)^v \geq 1 - \frac{1}{h \ln \ln n - n \sqrt{\frac{h \ln \ln n}{n}}} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $W_n = \{h: n \text{ кратно } h, \quad 2 \leq h \leq \sqrt{n/\ln n}\}$, $p_1 \geq 2\gamma \sqrt{(h \ln \ln n)/n}$, $2 \leq \gamma \leq \sqrt[4]{n}$, то вероятность $P_2^{(n)} \geq 1 - \delta_n$, где $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Обозначим через $P_n^{(2)}$ вероятность того, что в результате работы этапа α_2 алгоритма α построены только особые h -звезды, а через $P_l^{(2)}$ ($P_{v-l}^{(2)}$) — вероятность того, что на каждом подэтапе α_2^k , $k = 1, l$ ($k = l+1, \gamma$) построено $v(v+1)$ особых h -звезд.

Согласно конструкции алгоритма α , на каждом подэтапе α_2^k , $k = 1, l$ ($k = l+1, \gamma$) решается m задач размерности $v \times v ((v+1) \times (v+1))$. Принимая во внимание результат работы [7], для вероятности $P_n^{(2)}$ будет справедлива оценка:

$$P_n^{(2)} = (P_l^{(2)})^l (P_{v-l}^{(2)})^{v-l} \geq (1 - v(v+1) \exp\{-\varphi(n) \ln v\})^{ml} \times \\ \times (1 - (v+1)(v+2) \exp\{-\varphi(n) \ln(v+1)\})^{m(v-l)},$$

где $\varphi(n) = 2 + \frac{\ln(h\gamma \ln n)}{\ln v}$, $v = \left\lfloor \frac{N}{\gamma} \right\rfloor$, $N = \frac{n}{h}$.

Используя условия леммы 2 и неравенства $(1-x)^u \geq 1-ux$, $\forall x$, $u \in \mathbf{R}^+$, оценку для $P_n^{(2)}$ продолжим следующим образом:

$$\begin{aligned} P_n^{(2)} &\geq (1 - v(v+1) \exp\{-\varphi(n) \ln v\})^{m\gamma} \geq 1 - \exp\{2 \ln v - \\ &- \left(2 + \frac{\ln(h\gamma \ln n)}{\ln v} \right) \ln v + \ln(m\gamma)\} \geq 1 - \exp\{-\ln \ln n + \ln h - \\ &- \ln \gamma + \ln \gamma + \ln(h/2)\} = 1 - \exp\{-\ln \ln n - \ln 2\} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Лемма 2 доказана.

Обозначим через $A_{n,R}$ множество всех n -вершинных графов с ребрами,

взвешенными числами $\{1, \dots, R\}$. Будем считать, что появление каждого графа из $A_{n,R}$ равновероятно. Это эквивалентно тому, что вероятность p_v появления ребра с весом $v \in \{1, \dots, R\}$ в любом графе $G \in A_{n,R}$ равна $(R+1)^{-1}$.

Пусть $A_{n,R}^\xi$ — множество всех графов из $A_{n,R}$, обладающих свойством ξ . Будем говорить, что почти все графы из $A_{n,R}$ обладают свойством ξ , если существует такая монотонная функция $\psi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, что справедливо соотношение: $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_{n,R}^\xi|/|A_{n,R}| = 1, \forall R \leq \psi(n)$. Отсюда и из лемм 1, 2 вытекает

Теорема. Если $W_n = \{h : n \text{ кратно } h, 2 \leq h \leq \sqrt{n/\ln n}\}, h_0 = \max_{h \in W_n} h$,

$R \leq \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{n}{h \ln n}} - 1, 2 \leq \gamma \leq \sqrt[4]{n}$, то для почти всех графов $G \in A_{n,R}$, $n \in M, M = \{n > 3, W_n \neq \emptyset\}$ алгоритм α строит h_0 -покрытие, оптимальное по каждому из критериев $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$, т.е. $|X^0| = 1$.

Учитывая результат работы [6], касающийся сложности решения задачи выделения максимального паросочетания в двудольном графе $O(\sqrt{n^5})$, легко показать, что трудоемкость алгоритма α составляет $O(\sqrt{n^5}/\gamma h^{1/2})$ операций.

Список литературы

1. Шунгаров Х. Д. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1988. № 3. С. 47..
 2. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
 3. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М., 1982.
 4. Перепелица В. А. // Кибернетика. 1984. № 4. С. 62.
 5. Сергиенко И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. Киев, 1985.
 6. Horcroft J. E., Karp R. M. // SIAM. Journ. Comput. 1979. № 2. P. 225.
 7. Перепелица В. А. // Управляемые системы. Новосибирск, 1969. Вып. 2. С. 45.
- Поступила в редакцию 04.12.87.

УДК 519.10

А. Н. ИСАЧЕНКО, МУХИБУЛЛА АБДУЛЛА

ГРАНИ МНОГОГРАННИКА ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО БУЛЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Многогранник задачи квадратичного булевого программирования (КБП-многогранник) $\text{CH}(M_n)$ есть выпуклая оболочка в $R^{n \times n}$ множества матриц:

$$M_n = \{X \in \{-1, 1\}^{n \times n} | x_{ij} = x_{ii} \cdot x_{jj}, i \neq j\}.$$

Он был введен в рассмотрение в работе [1], где исследованы его основные свойства. В частности, показано, что $\text{vertCH}(M_n) = M_n$, $\dim \text{CH}(M_n) = n(n+1)/2$, $\text{diamCH}(M_n) = 1$, $O_{n \times n} \in \text{relintCH}(M_n)$.

В настоящей статье приводятся тривиальные справедливые неравенства для $\text{CH}(M_n)$ и исследуются его гиперграни (собственные грани максимальной размерности). Необходимые для понимания статьи определения и результаты из теории многогранников можно найти в [2, 3].

Пусть A — $(n \times n)$ -матрица, c — $(n+1)$ -вектор, b — скаляр. Введем следующие обозначения:

$$(A, b) = \left\{ X \in R^{n \times n} \mid \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_{ij} = b \right\},$$

$$F(A, b) = \left\{ X \in \text{CH}(M_n) \mid \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_{ij} = b \right\},$$