

С помощью соотношений (2) на мини-ЭВМ СМ-1420 с точностью до 10^{-3} получены на 32-й итерации значения нестационарных вероятностей, состояний, при этом $\forall k: |P_{32}(k, t) - P_{31}(k, t)| < 0,001$. Все вероятности $P(k, t)$ достигли своих стационарных значений при $t=8$, время счета приблизительно 7 мин.

Список литературы

1. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. М., 1977. Т. 2.
2. Haggison P. G. Journ. of Appl. Probability. 1981. V. 18. № 2. P. 482.
3. Маталыцкий М. А. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 7. С. 585.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967.
5. Маталыцкий М. А. Анализ и оптимизация многоступенчатых вычислительных систем методами теории массового обслуживания: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1986. 18 с.

Поступила в редакцию 22.12.87.

УДК 519.1

А. Г. ТАРНОВСКИЙ

ГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БАЛАНСИРОВКИ ТУРБИНЫ

Построена серия из двух градиентных алгоритмов приближенного решения задачи балансировки турбины * и приведена оценка качества одного из алгоритмов.

Задача формулируется следующим образом: необходимо расставить n грузов с заданными статическими моментами M_i в точках на периферии диска единичного радиуса, чтобы полученная в результате механическая система была как можно лучше сбалансирована. Задача сводится к минимизации на множестве S_n всех перестановок из чисел $1, \dots, n$ следующей функции:

$$f(\tau) = \left(\sum_{i=1}^n M_i \cos \varphi_{\tau_i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n M_i \sin \varphi_{\tau_i} \right)^2, \quad (1)$$

где φ_i — угол между радиус-вектором к i -й точке и осью абсцисс в декартовой прямоугольной системе координат, центр которой совмещен с центром диска.

Эту задачу можно интерпретировать так: составить такую сумму n неколлинеарных единичных векторов, определенных на плоскости, с n заданными весовыми коэффициентами M_i , чтобы результирующий вектор имел минимальную длину.

Считаем, что грузы занумерованы в порядке невозрастания абсолютных величин статических моментов M_i .

Для перестановки $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ введем обозначения:

$$f^k = f(\tau_1, \dots, \tau_{2k}) = \left(\sum_{i=1}^{2k} M_i \cos \varphi_{\tau_i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2k} M_i \sin \varphi_{\tau_i} \right)^2;$$

$$m^k = (M_{2k-1} - M_{2k})^2;$$

$$\Phi^k = \Phi(\tau_{2k-1}, \tau_{2k}) = 2M_{2k-1}M_{2k}(\cos(\varphi_{\tau_{2k-1}} - \varphi_{\tau_{2k}}) + 1);$$

$$\Theta^k = \Theta(\tau_1, \dots, \tau_{2k}) = 2 \sum_{i=1}^{2k-2} M_i (M_{2k-1} \cos(\varphi_{\tau_i} - \varphi_{\tau_{2k-1}}) + M_{2k} \cos(\varphi_{\tau_i} - \varphi_{\tau_{2k}})), \quad \Theta^1 = 0.$$

* Ю. Г. Стоян, В. З. Соколовский. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. Киев, 1980.

Приведем некоторые элементарные свойства функции $f(\tau)$:

$$1) 0 \leq f(\tau) \leq \left(\sum_{i=1}^n |M_i| \right)^2;$$

$$2) f(\tau_1, \dots, \tau_{2k+2}) = f(\tau_1, \dots, \tau_{2k}) + \Theta(\tau_1, \dots, \tau_{2k+2}) + m^{k+1} + \Phi(\tau_{2k+1}, \tau_{2k+2});$$

$$3) f(\tau) = \sum_{k=1}^{[n/2]} (m^k + \Theta^k + \Phi^k) + \text{sign}\{n/2\} (M_n^2 + 2M_n \sum_{i=1}^{n-1} M_i \cos(\varphi_{\tau_i} - \varphi_{\tau_n}));$$

Алгоритм 1. k -й шаг ($k = 1, \dots, [n/2]$). Устанавливаем грузы со статическими моментами M_{2k-1}, M_{2k} на незанятые места, определяемые теми углами $\varphi_{\tau_{2k-1}^1}$ и $\varphi_{\tau_{2k}^1}$, $\tau_{2k-1}^1 \neq \tau_{2k}^1$, на которых достигается минимум

$$\min_{\tau_{2k-1}^1, \tau_{2k}^1 \in S_k} f(\tau_1^1, \dots, \tau_{2k-2}^1, \tau_{2k-1}^1, \tau_{2k}^1), \text{ где } S_k \text{ — множество индексов углов,}$$

соответствующих незанятым местам на k -ом шаге. Полагаем $S_{k+1} = S_k \setminus \{\tau_{2k-1}^1, \tau_{2k}^1\}$ и переходим на $k+1$ шаг. Если останется один неустановленный груз, то на последнем шаге помещаем его на единственное незанятое место.

Под углом между точками i и j , в которые помещаются грузы, понимаем меньший угол между радиус-векторами к этим точкам.

Алгоритм 2. k -й шаг ($k = 1, \dots, [n/2]$). Грузы со статическими моментами M_{2k-1}, M_{2k} одинакового знака (разных знаков) помещаем в те, еще незанятые точки $\tau_{2k-1}^2, \tau_{2k}^2$, между которыми максимальный (минимальный) угол. При этом из всех возможных размещений устанавливаем их так, чтобы разбалансировка системы, состоящей из установленных и двух устанавливаемых грузов, была наименьшей. Если n нечетно, то на последнем шаге один оставшийся неустановленным груз устанавливаем на единственное незанятое место.

Предложенные алгоритмы необходимо применять в совокупности для решения поставленной задачи, так как существуют задачи, на которых лучшие результаты дает алгоритм 1 и наоборот. Приведем примеры. Пусть на диске шесть точек расположены так, что угол между любыми двумя соседними равен 60 градусам. При установке в эти точки грузов со статическими моментами 100, 70, 50, 50, 20, 20 первый алгоритм дает оптимальное решение ($f(\tau^1) = 0$), а второй — решение, небаланс которого равен 900. При установке на этот же диск грузов со статическими моментами 150, 100, 75, 25, 0, —50 первый алгоритм дает решение с небалансом 625, а второй — оптимальное решение ($f(\tau^2) = 0$). Сложность алгоритмов $O(n^3)$.

Решение задачи серий алгоритмов всегда будет не хуже, чем решение, построенное каждым из алгоритмов. Проанализируем качество алгоритма 2 для задачи с равными углами между любыми соседними точками.

Теорема. Для $n > 4$ справедлива следующая оценка качества решения, построенного алгоритмом 2:

$$f(\tau^2) \leq \sum_{k=1}^{n/2} m^k, \text{ если } n \text{ четно; } f(\tau^2) \leq \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{[n/2]} m^k} + M_n \right)^2, \text{ если } n \text{ не-}$$

четно, и эта оценка достигается асимптотически.

Доказательство. Пусть n четно. Тогда алгоритм 2 будет на k -ом шаге устанавливать грузы в точках, угол между которыми равен π :

$$f(\tau^2) = \sum_{k=1}^{n/2} m^k + \sum_{k=1}^{n/2} \min((\Theta(\tau_1^2, \dots, \tau_{2k-2}^2, \tau_{2k-1}^2, \tau_{2k}^2) + \Phi(\tau_{2k-1}^2, \tau_{2k}^2)), (\Theta(\tau_1^2, \dots, \tau_{2k-2}^2, \tau_{2k}^2, \tau_{2k-1}^2) + \Phi(\tau_{2k}^2, \tau_{2k-1}^2))). \quad (2)$$

Рассмотрим слагаемые, входящие в Θ^k :

$$\begin{aligned} & M_i (M_{2k-1} \cos(\varphi_{\tau_i^2} - \varphi_{\tau_{2k-1}}) - M_{2k} \cos(\varphi_{\tau_i^2} - \varphi_{\tau_{2k}})) = \\ & = 2M_i M_{2k-1} \cos\left(\varphi_{\tau_i^2} - \frac{\varphi_{\tau_{2k-1}} + \varphi_{\tau_{2k}}}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_{\tau_{2k-1}} - \varphi_{\tau_{2k}}}{2}\right) + \\ & + M_i (M_{2k} - M_{2k-1}) \cos(\varphi_{\tau_i^2} - \varphi_{\tau_{2k}}) = M_i (M_{2k} - M_{2k-1}) \cos(\varphi_{\tau_i^2} - \varphi_{\tau_{2k}}). \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \Theta^k = 2(M_{2k} - M_{2k-1}) \sum_{i=1}^{2k-2} M_i \cos(\varphi_{\tau_i^2} - \varphi_{\tau_{2k}}).$$

Учитывая, что в нашем случае $\Phi^k = 0$, оцениваем минимум в формуле (2):

$$\begin{aligned} & \min(\Theta(\tau_1^2, \dots, \tau_{2k-2}^2, \tau_{2k-1}, \tau_{2k}), \Theta(\tau_1^2, \dots, \tau_{2k-2}^2, \tau_{2k}, \tau_{2k-1})) = \\ & = \min(2(M_{2k} - M_{2k-1}) \sum_{i=1}^{2k-2} M_i \cos(\varphi_{\tau_i^2} - \varphi_{\tau_{2k}}), \\ & - 2(M_{2k} - M_{2k-1}) \sum_{i=1}^{2k-2} M_i \cos(\varphi_{\tau_i^2} - \varphi_{\tau_{2k}})) \leq 0, \end{aligned}$$

откуда выводим утверждение теоремы для четного n (для нечетного n доказательство аналогично).

Качество алгоритмов характеризует сравнение значения функции f на перестановках τ^1 , τ^2 и «плохой» перестановке τ , определенной правилом:

$$\varphi_{\tau_i} = \begin{cases} \frac{\pi i}{n}, & i \text{ четно} \\ -\frac{\pi(i-1)}{n}, & i \text{ нечетно.} \end{cases}$$

В случае четного n имеем:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \left(\sum_{i=1}^{[(n-2)/4]} (M_{2i} + M_{2i+1} - M_{n-2i+1} - M_{n-2i}) \cos \frac{2\pi}{n} i + \right. \\ &+ (M_1 - M_n)^2 + \left. \left(\sum_{i=1}^{[(n-2)/4]} (M_{2i} + M_{n-2i} - M_{2i+1} - M_{n-2i+1}) \sin \frac{2\pi i}{n} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{sign}\left\{\frac{n}{4}\right\} (M_{\frac{n}{2}} - M_{\frac{n}{2}+1})^2 \right) \right) \end{aligned}$$

или, учитывая, что $M_{2i} - M_{n-2i} \geq \sum_{j=i+1}^{n/2-i} (M_{2j-1} - M_{2j})$, $M_{2i+1} - M_{n-2i+1} \geq \sum_{j=i+1}^{n/2-i} (M_{2j-1} - M_{2j})$ при $n - 2i > 2i$ и $\cos \frac{2\pi i}{n} \geq 0$, $\sin \frac{2\pi i}{n} \geq 0$, $i = 1, \dots, \left[\frac{n-2}{4} \right]$, имеем

$$\begin{aligned} f(\tau) &\geq \left(\sum_{k=1}^{n/2} \sqrt{m^k} \right)^2 + 4 \sum_{k=1}^{n/2} \sqrt{m^k} \sum_{i=1}^{[(n-2)/4]} \sum_{j=i+1}^{n/2-i} \sqrt{m^j} \cos \frac{2\pi i}{n} + \\ &+ 4 \left(\sum_{i=1}^{[(n-2)/4]} \sum_{j=i+1}^{n/2-i} \sqrt{m^j} \cos \frac{2\pi i}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку Δ , указывающую, насколько решение, полученное алгоритмом 2, лучше самого «плохого решения»:

$$\Delta \geq f(\tau) - f(\tau^2) \geq 4 \sum_{k=1}^{n/2} \sqrt{m^k} \sum_{i=1}^{[(n-2)/4]} \sum_{j=i+1}^{n/2-i} \sqrt{m^j} \cos \frac{2\pi i}{n} + \\ + 4 \left(\sum_{i=1}^{[(n-2)/4]} \sum_{j=i+1}^{n/2-i} \sqrt{m^j} \cos \frac{2\pi i}{n} \right)^2.$$

Сравнивая оценку, полученную в теореме, с последней, приходим к следующим выводам:

- 1) если $\sqrt{m^1} + \sqrt{m^{n/2}} \leq \sum_{i=2}^{[(n-2)/4]} \sum_{j=i+1}^{n/2-i} \sqrt{m^j} \cos \frac{2\pi i}{n}$, то алгоритм 2

строит решение, которое асимптотически в 9 раз лучше по значению целевой функции, чем самое «плохое решение».

2) если $m^i = m^j$ для всех i и j , $1 \leq i, j \leq n/2$, то алгоритм 2 строит перестановку, на которой значение $f(\tau^2)$ асимптотически в $O(n^3)$ раз лучше, чем на самой «плохой перестановке».

3) если $m^i = 0$ для всех i , $1 \leq i \leq n/2$, то алгоритм 2 строит оптимальное решение.

Поступила в редакцию 16.10.87.

УДК 002.513.5

С. Ф. ЛИПНИЦКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИНТАКСИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ВХОДНЫХ СООБЩЕНИЙ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

Характерной чертой развития теории и практики современных автоматизированных информационных систем (АИС) является повышение их интеллектуальных возможностей в направлении совершенствования механизмов общения пользователей с АИС. Один из путей интеллектуализации АИС состоит в использовании в них входных языков, приближающихся по своей структуре и семантической силе к естественному языку [1, 2]. Обработка входных текстов в этих случаях осуществляется в несколько этапов, одним из которых является синтаксический анализ. Конечная цель синтаксического анализа — построение синтаксического графа каждого предложения текста.

В данной статье предлагаются математическая модель и алгоритм синтаксического анализа. В отличие от существующих предлагаемый алгоритм построен на основе изучения в рамках модели основных синтагматических отношений на цепочках входного языка, что позволило существенно упростить и ускорить процедуру анализа.

Свойства синтагматических отношений. Пусть U — словарь входного языка (входной словарь), элементы которого будем называть словами, U^* — множество всех цепочек в словаре U , а U^+ — множество всех непустых цепочек в U . По аналогии с [3] определим на множестве U^+ отношения парадигматического и синтагматического подчинения и синтагматической эквивалентности.

Определение 1. Рефлексивное и антисимметричное отношение Δ на множестве U^+ назовем отношением парадигматического подчинения, если для любых цепочек $a, b, c \in U^+$ и $m, n \in U^*$:

- 1) $(mbn, c) \in \Delta$ и $(a, b) \in \Delta$, то $(man, c) \in \Delta$;
- 2) $(a, mbn) \in \Delta$ и $(b, c) \in \Delta$, то $(a, mcn) \in \Delta$;
- 3) $(a, b) \in \Delta$ и $(c, b) \in \Delta$, то существует цепочка $d \in U^*$ такая, что $(d, a) \in \Delta$ и $(d, c) \in \Delta$.

Определение 2. Отношение δ на множестве U^+ назовем отношением синтагматического подчинения, если $(a, b) \in \delta$ тогда и только тогда, когда: