

Список литературы

1. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
3. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М., 1986.
4. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. М., 1977. Т. 2.
5. Монастырный П. И. // Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975. № 4. С. 32.
6. Динь Куанг Тхай, Листопад Г. И., Монастырный П. И. // Докл. АН БССР. 1987. Т. 31. № 11. С. 978.
7. Крылов В. И., Бобков В. И., Монастырный П. И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных. Минск, 1986.

Поступила в редакцию 16.11.87.

УДК 519.283

М. А. МАТАЛЫЦКИЙ

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

При исследовании стохастических моделей вычислительных систем и сетей — марковских сетей массового обслуживания — используются уравнения, которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$\frac{dP(\underline{k}, t)}{dt} = -\Lambda(\underline{k})P(\underline{k}, t) + \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k})P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, t), \quad (1)$$

где $\underline{k} = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1r}, k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2r}, \dots, k_{n1}, k_{n2}, k_{nr})$, k_{ic} — число заявок типа c в i -й системе обслуживания; $\Lambda(\underline{k})$, $\Phi_{icjs}(\underline{k})$ — некоторые неотрицательные коэффициенты; I_{ic} — вектор, получающийся из $\underline{k}$, если в нем положить $k_{ic} = 1$, а все остальные компоненты взять равными нулю; функция $P(\underline{k}, t)$ представляет собой вероятность состояния $\underline{k}$ в момент времени t .

Для решения уравнения (1) можно применить метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов [1]. Настоящая работа является развитием идей работы [2], в которой рассматривались марковские сети с одним типом заявок. При этом за начальное приближение будем брать стационарное распределение вероятностей состояний.

Пусть $P_m(\underline{k}, t)$, $m=0, 1, 2, \dots$ — приближение $P(\underline{k}, t)$ на m -й итерации. Тогда, как следует из (1),

$$\frac{d}{dt} \{ \exp [\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, t) \} = \exp [\Lambda(\underline{k})t] \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k})P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, t)$$

и поэтому

$$P_{m+1}(\underline{k}, t) = \exp [-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) + \exp [-\Lambda(\underline{k})t] \times \\ \times \int_0^t \exp [\Lambda(\underline{k})x] \left\{ \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k}) P_m(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, x) \right\} dx. \quad (2)$$

За начальное приближение возьмем $P_0(\underline{k}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\underline{k}, t) = P(\underline{k})$. Как видно из уравнения (1), $P(\underline{k})$ удовлетворяют соотношению

$$P(\underline{k}) \Lambda(\underline{k}) = \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k}) P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}), \quad (3)$$

поэтому

$$P_1(\underline{k}, t) = \exp [-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) + \{1 - \exp [-\Lambda(\underline{k})t]\} P(\underline{k}). \quad (4)$$

Для исследования свойств последовательных приближений нам понадобится следующая

Лемма 3. Если $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} A$, то

$$\int_0^t \exp[\Lambda(\underline{k})x] |f(x) - A| dx / \int_0^t \exp[\Lambda(\underline{k})x] dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Теорема 1. $\forall m > 0 \quad P_m(\underline{k}, 0) = P(\underline{k}, 0), P_m(\underline{k}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} P(\underline{k}).$

Доказательство. Первая часть теоремы следует из (2), докажем второе утверждение. При $m=1$ из (4) имеем $P_1(\underline{k}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} P(\underline{k})$. Предположим, что $P_{m-1}(\underline{k}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} P(\underline{k})$. Из (2), (3) следует, что

$$\begin{aligned} |P_m(\underline{k}, t) - P(\underline{k})| &\leq \exp[-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) + \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r [\Phi_{icjs}(\underline{k})/\Lambda(\underline{k})] \times \\ &\times |\exp[-\Lambda(\underline{k})t] \int_0^t \exp[\Lambda(\underline{k})x] P_{m-1}(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, x) d[\Lambda(\underline{k})x] - \\ &- P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js})|. \end{aligned} \quad (5)$$

Очевидно, $\exists U_h > 0$, такое, что $\exp[-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) \leq \exp[-\Lambda(\underline{k})t] \leq \varepsilon/2 \quad \forall t > U_h$. Полагая в лемме $P_{m-1}(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, x) = f(x)$, $P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}) = A$ и учитывая, что $\exp[-\Lambda(\underline{k})t] < \{\exp[\Lambda(\underline{k})t] - 1\}^{-1} = \left\{ \int_0^t \exp[\Lambda(\underline{k})x] dx \times \right.$
 $\left. \times [\Lambda(\underline{k})x] \right\}^{-1}$, из (5) можно показать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists T_h$, такое, что

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r [\Phi_{icjs}(\underline{k})/\Lambda(\underline{k})] |\exp[-\Lambda(\underline{k})t] \times \\ &\times \int_0^t \exp[\Lambda(\underline{k})x] P_{m-1}(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, x) - P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js})| < \varepsilon/2 \quad \forall t > T_h. \end{aligned}$$

Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists T = \max(U_h, T_h)$, что $|P_m(\underline{k}, t) - P(\underline{k})| < \varepsilon \quad \forall t > T$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Последовательность $\{P_m(\underline{k}, t)\}$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к решению уравнения (1).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству классической теоремы существования для дифференциальных уравнений [4]. При этом в доказательстве существования предела последовательности $\lim_{m \rightarrow \infty} P_m(\underline{k}, t) = P_\infty(\underline{k}, t)$ используются два соотношения:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(\underline{k}, t) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \{P_0(\underline{k}, t) + \sum_{q=1}^m [P_q(\underline{k}, t) - P_{q-1}(\underline{k}, t)]\} = \\ &= P_0(\underline{k}, t) + \sum_{q=1}^{\infty} [P_q(\underline{k}, t) - P_{q-1}(\underline{k}, t)] \end{aligned}$$

и

$$|P_m(\underline{k}, t) - P_{m-1}(\underline{k}, t)| \leq 2\Phi^{m-1} t^{m-1} / (m-1)! \quad \forall m \geq 0,$$

где $\Phi = (n+1)^2 r^2 \max \Phi_{icjs}(\underline{k})$, которое доказывается по индукции ($|P_1(\underline{k}, t) - P_0(\underline{k}, t)| \leq 2$, так как $P_1(\underline{k}, t)$, $P_0(\underline{k}, t)$ — приближения для вероятности $P(\underline{k}, t)$).

Если подставить $P_\infty(\underline{k}, t)$ в (2) вместо $P_m(\underline{k}, t)$ и $P_{m+1}(\underline{k}, t)$, то видим, что $P_\infty(\underline{k}, t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям $P_\infty(\underline{k}, 0) = P(\underline{k}, 0)$, согласно теореме 1.

Теорема 3. Для любого $m \geq 0$

$$P_m(\underline{k}, t) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{ml}(\underline{k}) t^l, \quad (6)$$

причем этот ряд сходится при любом конечном $t > 0$, а его коэффициенты удовлетворяют рекуррентным соотношениям.

Доказательство представления (6) следует при $m=0$ из соотношения (4), если разложить в нем функцию $\exp[-\Lambda(\underline{k})t]$ в ряд по степеням t , и далее по индукции из соотношения (2). Итак, пусть (6) выполняется. Тогда из (2) следует, что

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{m+1l}(\underline{k}) t^l = \exp[-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) + \sum_{l=0}^{\infty} A_{ml}(\underline{k}) B_l(t),$$

$$\text{где } A_{ml}(\underline{k}) = \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k}) a_{ml}(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}),$$

$$B_l(t) = \exp[-\Lambda(\underline{k})t] \int_0^t x^l \exp[\Lambda(\underline{k})x] dx = \frac{(-1)^{l+1} l!}{[\Lambda(\underline{k})]^{l+1}} \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\underline{k})t]^j}{j!},$$

последнее выражение получается путем интегрирования по частям. Таким образом, меняя порядок суммирования, будем иметь:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} a_{m+1l}(\underline{k}) t^l &= \exp[-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) + \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} A_{ml}(\underline{k}) \frac{(-1)^{l+1} l!}{[\Lambda(\underline{k})]^{l+1}} \sum_{j=l+1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\underline{k})t]^j}{j!} = \exp[-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) + \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\underline{k})t]^j}{j!} \sum_{l=0}^{j-1} A_{ml}(\underline{k}) \frac{(-1)^{l+1} l!}{[\Lambda(\underline{k})]^{l+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\underline{k})t]^l}{l!} P(\underline{k}, 0) t^l + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{[-\Lambda(\underline{k})t]^l}{l!} t^l \sum_{j=0}^{l-1} A_{mj}(\underline{k}) j! [-\Lambda(\underline{k})]^{-j-1}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при t^l , получаем

$$a_{m+1l}(\underline{k}) = \{[-\Lambda(\underline{k})]^l / l!\} \{P(\underline{k}, 0) + \sum_{j=0}^{l-1} A_{mj}(\underline{k}) j! [-\Lambda(\underline{k})]^{-j-1}\}, \quad l \geq 1,$$

$$a_{m+10}(\underline{k}) = P(\underline{k}, 0), \quad a_{0l}(\underline{k}) = P(\underline{k}) \delta_{l0},$$

где δ_{l0} — символ Кронекера.

В заключение отметим, что описанный метод легко применяется при исследовании различных марковских сетей массового обслуживания: с приоритетными заявками [3], с ограниченными очередями и блокировками, с ненадежными системами обслуживания, с ограниченными временами ожидания в очередях и т. д. [5]. Полученные результаты позволяют проводить исследования любых марковских сетей, для которых известно стационарное распределение вероятностей состояний.

В качестве примера приведем некоторые данные об исследовании замкнутой марковской двухузловой сети, в которой обслуживаются K_1 заявок первого типа, имеющих абсолютный приоритет, и K_2 заявок второго типа (бесприоритетных). Обозначим через μ_{ij} интенсивность обслуживания заявок j -го типа в i -й системе обслуживания сети, $i, j=1, 2$. При $K_1=1, K_2=2, \mu_{11}=\mu_{21}=\mu_{22}=1, \mu_{12}=2$ состояниями сети будут $(0, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 2), (0, 2, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 2, 0, 0)$. Положим

$$P(\underline{k}, 0) = \begin{cases} 1, & \underline{k} = (1, 2, 0, 0) \\ 0, & \underline{k} \neq (1, 2, 0, 0). \end{cases}$$

С помощью соотношений (2) на мини-ЭВМ СМ-1420 с точностью до 10^{-3} получены на 32-й итерации значения нестационарных вероятностей, состояний, при этом $\forall k: |P_{32}(k, t) - P_{31}(k, t)| < 0,001$. Все вероятности $P(k, t)$ достигли своих стационарных значений при $t=8$, время счета приблизительно 7 мин.

Список литературы

1. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Вычислительные методы. М., 1977. Т. 2.
2. Haggison P. G. Journ. of Appl. Probability. 1981. V. 18. № 2. P. 482.
3. Маталыцкий М. А. // Докл. АН БССР. 1984. Т. 28. № 7. С. 585.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967.
5. Маталыцкий М. А. Анализ и оптимизация многоступенчатых вычислительных систем методами теории массового обслуживания: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1986. 18 с.

Поступила в редакцию 22.12.87.

УДК 519.1

А. Г. ТАРНОВСКИЙ

ГРАДИЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БАЛАНСИРОВКИ ТУРБИНЫ

Построена серия из двух градиентных алгоритмов приближенного решения задачи балансировки турбины * и приведена оценка качества одного из алгоритмов.

Задача формулируется следующим образом: необходимо расставить n грузов с заданными статическими моментами M_i в точках на периферии диска единичного радиуса, чтобы полученная в результате механическая система была как можно лучше сбалансирована. Задача сводится к минимизации на множестве S_n всех перестановок из чисел $1, \dots, n$ следующей функции:

$$f(\tau) = \left(\sum_{i=1}^n M_i \cos \varphi_{\tau_i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n M_i \sin \varphi_{\tau_i} \right)^2, \quad (1)$$

где φ_i — угол между радиус-вектором к i -й точке и осью абсцисс в декартовой прямоугольной системе координат, центр которой совмещен с центром диска.

Эту задачу можно интерпретировать так: составить такую сумму n неколлинеарных единичных векторов, определенных на плоскости, с n заданными весовыми коэффициентами M_i , чтобы результирующий вектор имел минимальную длину.

Считаем, что грузы занумерованы в порядке невозрастания абсолютных величин статических моментов M_i .

Для перестановки $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ введем обозначения:

$$f^k = f(\tau_1, \dots, \tau_{2k}) = \left(\sum_{i=1}^{2k} M_i \cos \varphi_{\tau_i} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{2k} M_i \sin \varphi_{\tau_i} \right)^2;$$

$$m^k = (M_{2k-1} - M_{2k})^2;$$

$$\Phi^k = \Phi(\tau_{2k-1}, \tau_{2k}) = 2M_{2k-1}M_{2k}(\cos(\varphi_{\tau_{2k-1}} - \varphi_{\tau_{2k}}) + 1);$$

$$\Theta^k = \Theta(\tau_1, \dots, \tau_{2k}) = 2 \sum_{i=1}^{2k-2} M_i (M_{2k-1} \cos(\varphi_{\tau_i} - \varphi_{\tau_{2k-1}}) + M_{2k} \cos(\varphi_{\tau_i} - \varphi_{\tau_{2k}})), \quad \Theta^1 = 0.$$

* Ю. Г. Стоян, В. З. Соколовский. Решение некоторых многоэкстремальных задач методом сужающихся окрестностей. Киев, 1980.