7. Conti R. Linear Differential Equations and Control. New York, 1976.

8. Изобов Н. А., Прохорова Р. А. // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 775.

9. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова. М., 1966.

Поступила в редакцию 14.11.87.

УДК 518.61

ДИНЬ КУАНГ ТХАИ, П. И. МОНАСТЫРНЫЙ, НГУЕН ФЬОНГ МАИ

О Понижении Порядка Систем Сеточных Уравнений в Алгоритмах Множественной Разностной Пристрелки и Некоторых Их Свойствах

1. В теории метода сеток и в многочисленных его приложениях важное место занимают вопросы разработки вычислительных алгоритмов для решения специальных сеточных граничных задач [1—3], в частности задач вида:

$$\vec{Y}_{j+1} + C_j \vec{Y}_j + B_j \vec{Y}_{j-1} = \vec{F}_j, \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (1)$$

$$G_0 \vec{Y}_0 + G_1 \vec{Y}_1 = \vec{g}_0, \quad H_1 \vec{Y}_N + H_0 \vec{Y}_{N-1} = \vec{h}_N, \quad (2)-(3)$$

где $C_j = (c_{ik}(j))_1^M$, $B_j = (b_{ik}(j))_1^M$, $\vec{F}_j \in R^M$ — известные матрицы и векторы; $G_s = (g_{ik}(s))_1^M$, $H_s = (h_{ik}(s))_1^M$, $s = 0, 1$, $\vec{g}_0$, $\vec{h}_N \in R^N$ — заданные матрицы и векторы; $\vec{Y}_j \in R^M$, $j = \overline{0, N}$ — векторы, подлежащие определению.

Если никаких специальных и довольно частых ограничений на матрицы B_j , C_j , H_s , G_s не накладывать, то для численного решения задачи (1) — (3) нельзя будет применить практически ни одного эффективного алгоритма [1, 3, 4], предназначенного, например, для решения родственных задач в случае эллиптических разностных уравнений. Сеточная задача (1) — (3) представляет собой систему ЛАУ (линейные алгебраические уравнения) размерности $r = M(N+1)$ и r во многих случаях может быть очень большим. Это обстоятельство, в частности, при численном решении систем ЛАУ может стать причиной переполнения разрядной сетки ЭВМ, большого накопления погрешностей и т. д. Актуальна поэтому задача построения таких алгоритмов, в которых снижалась бы размерность систем ЛАУ и улучшались бы их свойства. Такие алгоритмы можно построить, используя идею множественной разностной пристрелки [5, 6, 7].

2. Пусть $N = mp + 1$, где число m определяет количество подынтегралов пристрелки, а число p — их длину [6]. Для многих задач, например, границы изменения $2 \leq m \leq 10$ являются типичными. Определим точки и параметры пристрелки: $j = 0, 1; p, p + 1, \dots; mp, mp + 1$ и $\vec{Y}_0, \vec{Y}_1; \vec{Y}_p, \vec{Y}_{p+1}; \dots; \vec{Y}_{mp}, \vec{Y}_{mp+1}$. Возьмем в качестве начальных значений параметров пристрелки $\vec{Y}_0^{(0)}, \vec{Y}_1^{(0)}; \dots; \vec{Y}_{mp}^{(0)}, \vec{Y}_{mp+1}^{(0)}$ и найдем решения разностных задач Коши на подынтервалах пристрелки $[(l-1)p, (l-1)p + 1; lp, lp + 1]$, $l = \overline{1, m}$. Используя условия непрерывности решения задачи (1) — (3), обычным путем [5] получим замыкающую систему вида:

$$A \vec{Y} = \vec{\Phi}, \quad (4)$$

где $\vec{Y} = (\vec{Y}_0^{(0)}, \vec{Y}_1^{(0)}, \vec{Y}_p^{(0)}, \dots, \vec{Y}_{mp}^{(0)}, \vec{Y}_{mp+1}^{(0)}) \in R^{2(m+1)M}$, $\vec{\Phi} = (-\vec{g}_0, \vec{\Phi}_p^{(0)}, \vec{\Phi}_{p+1}^{(0)}, \dots, \vec{\Phi}_p^{(m-1)}, \vec{\Phi}_{p+1}^{(m-1)}, \vec{h}_N) \in R^{2(m+1)M}$, а матрица A является блочной и четырехдиагональной, первая и последняя строки которой состоят из блоков типа $Q_p^{(l)}, Q_{p+1}^{(l)}, P_p^{(l)}, P_{p+1}^{(l)}, -E$, $l = \overline{0, m-1}$. В целях экономии

$= \|U\vec{x}\|_\infty$. По определению нормы $\|\cdot\|_\infty$ запишем последнее равенство в виде:

$$(U_{p-1} + U_{p-2} + 1) \max_i |x_i| = \max_i \{ |-U_{p-2}x_{i-1} + U_{p-1}x_i - x_{i+1}|, |U_{p-1}x_1 - x_2|, |-U_{p-2}x_{2m-2} + U_{p-1}x_{2m-1}| \}.$$

Учитывая $U_{p-1} > 0$, $U_{p-2} > 0$, получаем противоречие. Отсюда по лемме 1 значение $\lambda_2^{(0)}$ также не принадлежит спектру матрицы U . Лемма доказана.

Лемма 3. Для числа обусловленности матрицы U верно представление:

$$\nu(U) = 2p - 1 + \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{a - \cos \frac{\pi}{m}}, \text{ где } a = \begin{cases} 1, & c = 2, \\ \frac{c-2 + \sqrt{c^2-4}}{\sqrt{c^2-4}}, & c > 2. \end{cases}$$

Доказательство. Из леммы 2 следует:

$$\min \lambda_k(U) = \lambda_2^{(1)} = U_{p-1} - \sqrt{U_{p-2}^2 + 1 + 2U_{p-2} \cos \varphi_1},$$

$$\max \lambda_k(U) = \lambda_1^{(1)} = U_{p-1} + \sqrt{U_{p-2}^2 + 1 + 2U_{p-2} \cos \varphi_1}.$$

Легко показать, что $U_{p-1} \left(\frac{1}{2}c\right) \cong p - a$, $U_{p-2} \left(\frac{1}{2}c\right) \cong (p-1)a$. Это позволяет получить приближенное представление для $\nu(U)$:

$$\begin{aligned} \nu(U) &= \frac{\lambda_1^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} = \frac{pa + \sqrt{(p-1)^2 a^2 + 1 + 2(p-1)a \cos \frac{\pi p}{n}}}{pa - \sqrt{(p-1)^2 a^2 + 1 + 2(p-1)a \cos \frac{\pi p}{n}}} \cong \\ &\cong \frac{2(p-1)a + \cos \frac{\pi p}{n}}{a - \cos \frac{\pi p}{n}} \cong 2p - 1 + \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{a - \cos \frac{\pi}{m}}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что если m уменьшается в интервале $\left[2, \frac{n}{2}\right]$,

то значение $\nu(U)$ будет также уменьшаться. Для иллюстрации приведем значения $\nu(U)$ при некоторых m в случае $c=2$:

m	10	8	6	4	2
$\nu(U)$	4,08n	3,29n	2,48n	1,71n	n.

Леммы 1—3 позволяют сформулировать обычные в этих случаях теоремы [5] о сходимости и числе итераций таких, например, методов, как метод сопряженных градиентов и других родственных методов. Если полученную здесь систему вида (8) и исходную систему (9) решать, например, одним из итерационных (двух или трехшаговых) методов, то в первом случае число итераций для достижения точности ε будет $O\left(r \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$, а во втором — $O\left(\sqrt{r} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$, где под r понимается порядок решаемых систем [1, 2]. Если же эти системы решать по методу сопряженных градиентов, то число итераций для системы (9) будет $s \leq r \leq 2(m+1)$, для системы (8) соответственно $s \leq r \leq n+1$. При этом обычно бывает $2(m+1) \ll n+1$. Отметим, что при возрастании значений p будет упрощаться структура матрицы U , в первую очередь ее размерность, и улучшаться спектральные свойства. Это, однако, не означает, что выбор больших значений p всегда выгоден, поскольку при чрезмерных значениях p могут ухудшаться свойства пристрелочных траекторий. Выбор p и m поэтому должен быть компромиссным с тем, чтобы в должной мере были обеспечены благоприятные вычислительные свойства как замыкающей системы, так и пристрелочных траекторий [6].

Список литературы

1. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
3. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М., 1986.
4. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. М., 1977. Т. 2.
5. Монастырный П. И. // Вестн АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1975. № 4. С. 32.
6. Динь Куанг Тхай, Листопад Г. И., Монастырный П. И. // Докл. АН БССР. Т. 31. № 11. С. 978.
7. Крылов В. И., Бобков В. И., Монастырный П. И. Начала теории вычислительных методов. Уравнения в частных производных. Минск, 1986.

Поступила в редакцию 16.11.87.

УДК 519.283

М. А. МАТАЛЫЦКИИ

О РЕШЕНИИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

При исследовании стохастических моделей вычислительных систем и сетей — марковских сетей массового обслуживания — используются уравнения, которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$\frac{dP(\underline{k}, t)}{dt} = -\Lambda(\underline{k})P(\underline{k}, t) + \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k})P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, t), \quad (1)$$

где $\underline{k} = (k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1r}, k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2r}, \dots, k_{n1}, k_{n2}, k_{nr})$, k_{ic} — число заявок типа c в i -й системе обслуживания; $\Lambda(\underline{k})$, $\Phi_{icjs}(\underline{k})$ — некоторые неотрицательные коэффициенты; I_{ic} — вектор, получающийся из $\underline{k}$, если в нем положить $k_{ic} = 1$, а все остальные компоненты взять равными нулю; функция $P(\underline{k}, t)$ представляет собой вероятность состояния $\underline{k}$ в момент времени t .

Для решения уравнения (1) можно применить метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов [1]. Настоящая работа является развитием идей работы [2], в которой рассматривались марковские сети с одним типом заявок. При этом за начальное приближение будем брать стационарное распределение вероятностей состояний.

Пусть $P_m(\underline{k}, t)$, $m=0, 1, 2, \dots$ — приближение $P(\underline{k}, t)$ на m -й итерации. Тогда, как следует из (1),

$$\frac{d}{dt} \{ \exp[\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, t) \} = \exp[\Lambda(\underline{k})t] \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k})P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, t)$$

и поэтому

$$P_{m+1}(\underline{k}, t) = \exp[-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) + \exp[-\Lambda(\underline{k})t] \times \\ \times \int_0^t \exp[\Lambda(\underline{k})x] \left\{ \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k}) P_m(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}, x) \right\} dx. \quad (2)$$

За начальное приближение возьмем $P_0(\underline{k}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\underline{k}, t) = P(\underline{k})$. Как видно из уравнения (1), $P(\underline{k})$ удовлетворяют соотношению

$$P(\underline{k}) \Lambda(\underline{k}) = \sum_{i,j=0}^n \sum_{c,s=1}^r \Phi_{icjs}(\underline{k}) P(\underline{k} + I_{ic} - I_{js}), \quad (3)$$

поэтому

$$P_1(\underline{k}, t) = \exp[-\Lambda(\underline{k})t] P(\underline{k}, 0) + \{1 - \exp[-\Lambda(\underline{k})t]\} P(\underline{k}). \quad (4)$$