Список литературы

1. Пакулов Н. И., Уханов В. Ф., Чернышов П. Н. Мажоритарный принцип построения надежных узлов и устройств ЦВМ. М., 1974.
2. Международная классификация изобретений (четвертая редакция). М. кл.[4] НОЗК 19/23. М., 1985.
3. Боголюбов И. Н., Овсиевич Б. Л., Розенблюм Л. Я. // Сети передачи информации и их автоматизация. М., 1965. С. 80.
4. Фон Нейман Дж. // Автоматы. М., 1956. С. 68.
5. Лысиков Б. Г. Арифметические и логические основы цифровых автоматов. Минск, 1980.

Поступила в редакцию 23.06.86.

УДК 621.382.049.77.019.3

В. М. БОРЗДОВ

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ВЫСОКОНАДЕЖНЫХ ИЗДЕЛИЙ МИКРОЭЛЕКТРОНИКИ

В данной статье в рамках физико-статистического подхода к оценке параметрической надежности высоконадежных изделий электронной техники [1, 2] рассматривается вопрос о возможности построения оптимального доверительного интервала для среднего времени их безотказной работы. Предполагается, что в силу высокой надежности этих изделий отсутствуют какие-либо данные о статистике отказов в нормальных условиях их эксплуатации, но известна физико-математическая модель процесса деградации, а плотность распределения времени до первого отказа $f(t, \mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ подчиняется логарифмически нормальному распределению

$$f(t, \mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) = \frac{1}{t}\varphi_{\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2}(\ln t), \qquad (1)$$

где μ_ε и σ_ε — параметры плотности нормального распределения $\varphi_{\mu_\varepsilon, \sigma_\varepsilon^2}$, в общем случае зависящие от величины нагрузки ε. Выбор распределения (1) обусловлен тем, что в теории и практике надежности оно чаще других используется для описания статистики отказов полупроводниковых приборов и интегральных схем.

Будем решать следующую задачу. Пусть в результате проведения натурных ускоренных испытаний в форсированном режиме ε (в условиях повышенной температуры, электрической нагрузки, влажности и т. д.) и моделирования процесса деградации изделий на ЭВМ получены две неоднородные относительно друг друга выборки объемом N_1 и N_0. Положим также, что методом максимума правдоподобия найдены соответствующие точечные оценки логарифма среднего времени безотказной работы $\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_1)}$ и $\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_0)}$, причем оценка $\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_1)}$ найдена по группированным наблюдениям, так как в результате натурного эксперимента индивидуальные времена отказов неизвестны, а оценка $\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_0)}$ — по рассчитанным на ЭВМ индивидуальным временам отказов.

Обозначим значения среднего времени безотказной работы, соответствующие первой и второй выборкам, через $t_\varepsilon^{(0_1)}$ и $t_\varepsilon^{(0)}$. При этом будем считать, что $t_\varepsilon^{(0_1)}$ — истинное значение, а величина смещения $l = t_\varepsilon^{(0)} - t_\varepsilon^{(0_1)}$ ограничена и лежит в пределах $-c_1 \leqslant l \leqslant c_2$, где c_1 и c_2 — заданные априорно положительные числа. В этих условиях статистическим моделированием на ЭВМ требуется найти наилучшую в некотором смысле интервальную оценку среднего времени безотказной работы изделия в нормальных условиях его эксплуатации.

Для достижения поставленной цели воспользуемся асимптотическим подходом построения доверительных интервалов, согласно которому для асимптотически нормальной оценки $\widehat{\theta}$ некоторого параметра θ границы доверительного интервала уровня $1-\gamma$ будут иметь вид [3]: $\theta^{\mp} = \widehat{\theta} \pm \pm \frac{u_{\gamma/2}\sigma(\widehat{\theta})}{\sqrt{N}}$, где $u_{\gamma/2}$ — квантиль нормального распределения порядка $1 - -\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\sigma(\widehat{\theta})}{\sqrt{N}}$ — среднеквадратическое отклонение оценки $\widehat{\theta}$ так, что распределение $\frac{(\widehat{\theta}-\theta)\sqrt{N}}{\sigma(\widehat{\theta})}$ слабо сходится к нормальному с параметрами (0, 1), т. е. $\frac{(\widehat{\theta}-\theta)\sqrt{N}}{\sigma(\widehat{\theta})} \Rightarrow \Phi_{0,1}$.

Найдем предварительно асимптотическое распределение статистики $\widehat{t}_\varepsilon^{(N_1)} = \exp(\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_1)} + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2)$. Обозначив математическое ожидание оценки $\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_1)}$ через $\mu_\varepsilon^{(0_1)}$, т. е. $\mu_\varepsilon^{(0_1)} = M\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_1)}$, и считая дисперсию σ_ε^2 известной и равной $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2$, получим

$$\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_1)} = \mu_\varepsilon^{(0_1)} + \frac{\sigma}{\sqrt{N_1 \sum_{i=1}^{k} \frac{[\varphi(z_i)-\varphi(z_{i-1})]^2}{\Phi(z_i)-\Phi(z_{i-1})}}}\eta = \mu_\varepsilon^{(0_1)} + \frac{\sigma}{\sqrt{N_1 A}} N(0, 1).$$

Здесь $\eta \sim N(0, 1)$ — нормально распределенная с параметрами (0, 1) случайная величина; $\frac{\sigma}{\sqrt{N_1 A}}$ — среднеквадратическое отклонение логарифма времени до отказа изделий, наблюдения над которым осуществляются в моменты времени t_i и сгруппированы в k интервалов [4]; $\Phi(z_i) = \Phi(\ln t_i)$ — нормальная функция распределения.

Откуда следует, что $\widehat{t}_\varepsilon^{(N_1)}$ будет распределена как $\exp[\mu_\varepsilon^{(0_1)} + \frac{\sigma^2}{2} + + \frac{\sigma}{\sqrt{N_1 A}} N(0, 1)]$, поэтому при $N_1 \to \infty$

$$\widehat{t}_\varepsilon^{(N_1)} - t_\varepsilon^{(0_1)} = \exp\left[\mu_\varepsilon^{(0_1)} + \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma}{\sqrt{N_1 A}}\eta\right] - \exp\left[\mu_\varepsilon^{(0_1)} + \frac{\sigma^2}{2}\right] =$$

$$= t_\varepsilon^{(0_1)}\left[\frac{\sigma}{\sqrt{N_1 A}}\eta + 0\left(\frac{1}{N_1}\right)\right],$$

где $0\left(\frac{1}{N_1}\right)$ — случайная величина, характеризующая сходимость случайной последовательности по вероятности. Следовательно,

$$\sqrt{N_1}\,(\widehat{t}_\varepsilon^{(N_1)} - t_\varepsilon^{(0_1)}) \sim t_\varepsilon^{(0_1)}\left[\frac{\sigma}{\sqrt{A}}\eta + 0\left(\frac{1}{\sqrt{N_1}}\right)\right] \xrightarrow{P} N\left(0, \frac{[t_\varepsilon^{(0_1)}]^2\sigma^2}{A}\right).$$

Аналогично для статистики $\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)} = \exp\left(\widehat{\mu}_\varepsilon^{(N_0)} + \frac{1}{2}\sigma_\varepsilon^2\right)$ при $N_0 \to \infty$:

$$\sqrt{N_0}(\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)} - t_\varepsilon^{(0)}) \sim t_\varepsilon^{(0)}\left[\sigma\eta + 0\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right)\right] \xrightarrow{P} N(0, [t_\varepsilon^{(0)}]^2\sigma^2).$$

Поставим следующий вопрос. Как выбрать границы доверительного интервала, чтобы в некотором смысле наилучшим образом учесть неоднородную информацию, содержащуюся как в выборке, полученной с помощью натурных испытаний, так и в выборке, полученной статистическим моделированием на ЭВМ? Можно попытаться найти оптимальную величину границы в смысле минимума максимального по параметру l

отклонения ее математического ожидания, используя неасимптотический подход, предложенный в [5].

Ввиду полной аналогии вычислительных процедур при нахождении нижней и верхней асимптотических доверительных границ рассмотрим случай только нижней границы, которую будем искать согласно основной идее указанной работы в виде

$$t_\varepsilon^- = a_0 + a_1 \hat{t}_\varepsilon^{(N_1)} + a_2 \hat{t}_\varepsilon^{(N_0)}, \qquad (2)$$

где a_0, a_1 и a_2 — некоторые положительные коэффициенты, причем $a_1 + a_2 = 1$.

Несмещенная оценка $\hat{t}_\varepsilon^{(N_1, N_0)}$ искомой величины $\hat{t}_\varepsilon^{(0_1)}$, полученная объединением двух выборок объемом N_1 и N_0, будет равна $\hat{t}_\varepsilon^{(N_1, N_0)} = a_1 \hat{t}_\varepsilon^{(N_1)} + a_2 (\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)} - l)$, $-c_1 \leqslant l \leqslant c_2$. Если обозначить

$$\delta = \hat{t}_\varepsilon^{(N_1, N_0)} - t_\varepsilon^- = -a_0 - a_2 l, \qquad (3)$$

то $t_\varepsilon^- = \hat{t}_\varepsilon^{(N_0, N_1)} - \delta$. Тогда вероятность того, что $t_\varepsilon^- \leqslant t_\varepsilon^{(0_1)}$, будет равна $P(t_\varepsilon^- \leqslant t_\varepsilon^{(0_1)}) = P(\hat{t}_\varepsilon^{(N_1, N_0)} - \delta \leqslant t_\varepsilon^{(0_1)}) = P(\hat{t}_\varepsilon^{(N_1, N_0)} \leqslant t_\varepsilon^{(0_1)} + \delta)$. Так как $\hat{t}_\varepsilon^{(N_1, N_0)}$ распределена асимптотически нормально, при N_1 и $N_0 \to \infty$

$$P(\hat{t}_\varepsilon^{(N_1, N_0)} \leqslant t_\varepsilon^{(0_1)} + \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{D}}\right), \qquad (4)$$

где D — соответствующая дисперсия.

Подставляя (3) в (4), получаем $\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{D}}\right) = \Phi\left(\frac{-a_0 - a_2 l}{\sqrt{D}}\right)$.

При выбранном $\gamma > 0$ определим далее такое a_0, чтобы выполнялось условие $\min\limits_l \Phi\left(\frac{-a_0 - a_2 l}{\sqrt{D}}\right) = 1 - \frac{\gamma}{2}$ при $-c_1 \leqslant l \leqslant c_2$. Очевидно, в этом случае коэффициент a_0 будет

$$a_0 = -u_{\gamma/2}\sqrt{D} - a_2 c_2. \qquad (5)$$

Из (3) и (4) следует, что $\delta = u_{\gamma/2}\sqrt{D} + a_2(c_2 - l)$.

Согласно критерию сравнения оценок вида (2) [5], необходимо минимизировать по a_0, a_1 и a_2 максимум по l функции $M[t_\varepsilon^{(0_1)} - t_\varepsilon^-]$, т. е. найти $\min\limits_{a_0, a_1, a_2} \max\limits_{-c_1 \leqslant l \leqslant c_2} M[t_\varepsilon^{(0_1)} - t_\varepsilon^-]$. Опуская промежуточные выкладки, по аналогии с [5] можно показать, что выполнение этого условия приводит к следующему равенству (в силу большого N_0 в качестве средних логнормального распределения $t_\varepsilon^{(0_1)}$ и $t_\varepsilon^{(0)}$ взяты их оценки $\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)} - l$ и $\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)}$);

$$M[t_\varepsilon^{(0_1)} - t_\varepsilon^-] \approx \begin{cases} \dfrac{u_{\gamma/2}\sigma}{\sqrt{N_1 N_0 A}} \sqrt{(1-a_2)^2 N_0 [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)} - l]^2 + a_2^2 N_1 A [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)}]^2} + a_2(c_2 - l) \\ \qquad\qquad \text{при } a_2 = \dfrac{N_0 [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)} + c_1]^2 - \nu_1 \nu_2}{N_0 [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)} + c_1]^2 + A N_1 [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)}]^2}; \\ \dfrac{u_{\gamma/2}\sigma [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)} - l]}{\sqrt{N_1 A}} \quad \text{при } a_2 = 0, \end{cases}$$

где $\nu_1 = \dfrac{\sqrt{A N_1 N_0}(c_1 + c_2)}{u_{\gamma/2}\sigma}$ и $\nu_2 = \dfrac{A N_1 N_0 [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)} + c_1]^2 [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)}]^2}{N_0 [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)} + c_1]^2 + A N_1 [\hat{t}_\varepsilon^{(N_0)}]^2 - \nu_1^2}$.

Покажем, что граница, определяемая формулой (2), является более предпочтительной в смысле меньшего значения $M[t_\varepsilon^{(0_1)} - t_\varepsilon^-]$ по сравнению с границей, определяемой только лишь по результатам статистического моделирования, для которой справедлива формула

$$t_{\varepsilon M}^{-}\approx\frac{1}{N_0}\sum_{j=1}^{N_0}t_j-u_{\gamma/2}\frac{\sigma\widehat{t}_{\varepsilon}^{(N_0)}}{\sqrt{N_0}}. \qquad (6)$$

Для этого сравним при различных значениях c_2 и фиксированном c_1 две величины $M\,[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_\varepsilon^{-}]$ и $M\,[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_{\varepsilon M}^{-}]$.

Можно показать, что

$$\max_{c_1\leqslant l\leqslant c_2} M\,[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_\varepsilon^{-}]=\begin{cases}\dfrac{u_{\gamma/2}\sigma\nu_2}{\sqrt{N_1N_0A}}+\dfrac{N_0\,[\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)}+c_1]^2-\nu_1\nu_2}{N_0\,[\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)}+c_1]^2+AN_1[\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)}]^2}(c_1+c_2), \\ \qquad\qquad \text{если } \nu_1^2<N_0\,[\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)}+c_1]^2; \\ \dfrac{u_{\gamma/2}\sigma\,[\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)}+c_1]}{\sqrt{N_1A}}, \text{ если } \nu_1^2\geqslant N_0\,[\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)}+c_1],\end{cases}$$

а для того же коэффициента доверия $1-\dfrac{\gamma}{2}$:

$$\max_{-c_1\leqslant l\leqslant c_2} M\,[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_{\varepsilon M}^{-}]=\max_{-c_1<l<c_2}u_{\gamma/2}\frac{\sigma\widehat{t}_{\varepsilon M}^{(N_0)}}{\sqrt{N_0}}+(c_2-l)=u_{\gamma/2}\frac{\sigma\widehat{t}_{\varepsilon M}^{(N_0)}}{\sqrt{N_0}}+(c_1+c_2).$$

Простейший анализ показывает, что для небольших величин c_2, а именно, когда $c_2\leqslant c_0$, $M[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_\varepsilon^{-}]\approx M[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_{\varepsilon M}^{-}]$, и поэтому рассматриваемые оценки мало отличаются друг от друга в смысле принятого критерия сравнения. Значение $c_2=c_0$ определяется из условия $\nu_1^2=N_0[\widehat{t}_\varepsilon^{(N_0)}+c_1]^2$. Однако когда $c_2>c_0$, оценка вида (2) становится предпочтительнее оценки (6), так как $M\,[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_\varepsilon^{-}]\leqslant M[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_{\varepsilon M}^{-}]$. При этом границу (6) можно скорректировать. Это предлагается сделать с помощью умножения ее на поправочный коэффициент

$$K=\frac{M[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_\varepsilon^{-}]}{M[t_\varepsilon^{(0_1)}-t_{\varepsilon M}^{-}]}.$$

Таким образом, если зависимость l от величины нагрузки ε известна (в частном случае l может не зависеть от ε), то, используя результаты статистического моделирования и введенный поправочный коэффициент, можно построить доверительную границу при нормальных условиях эксплуатации изделий. При независимости l от ε она будет иметь вид

$$t_{HM}^{-}=\left(\frac{1}{N_H}\sum_{m=1}^{N_H}t_m-u_{\gamma/2}\frac{\sigma_H\widehat{t}_H^{(N_H)}}{\sqrt{N_H}}\right)K,$$

где индекс H указывает на нормальные условия эксплуатации.

Список литературы

1. Широков А. М., Борздов В. М., Молофеев В. М. // Тр. 39-й Всесоюз. науч. сессии, посвящ. Дню радио. М., 1984. Ч. 1. С. 60.
2. Широков А. М., Борздов В. М., Молофеев В. М. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. 1985. № 2. С. 63.
3. Боровков А. А. Математическая статистика. М., 1984.
4. Кулльдорф Г. Введение в теорию оценивания по группированным и частично группированным выборкам. М., 1966.
5. Лейфер А. А., Львова И. В. // Надежность и контроль качества. 1983. № 5. С. 55.

Поступила в редакцию 07.07.87.