3. Случай промежуточной длины:

$$\frac{2\cos 2\Theta_Б}{\chi''_{00}\omega_Б} < T < \frac{2}{\chi''_{00}\omega_Б}.$$

Здесь соотношения характеристик бокового пика параметрического рентгеновского излучения при нормальном и наклонном падении имеют промежуточный характер между выражениями (12) и (14). Отметим, что мы пренебрегли зеркально-отраженными волнами рентгеновских лучей от кристаллической пластинки, поэтому условие применимости формул (5), (6) и соотношений (12), (14) будет:

$$\max\left\{\frac{1}{\gamma_0};\ \frac{1}{\gamma_1}\right\} \ll |\chi'_{00}(\omega_Б)|^{-1/2}. \qquad (16)$$

Кроме того, в данной работе не учитывалось влияние многократного рассеяния заряженной частицы внутри пластинки на генерацию ПРИ. Это справедливо, если длина формирования тормозного излучения $T_s$ гораздо больше $L_{эф.}$, определямой в (3), где $T_s = (\omega q)^{-1/2}$; $q = \left(\frac{E_s}{2E}\right)\frac{1}{L_R}$ — одна четверть среднеквадратичного угла многократного рассеяния частицы на единицу пути; $E_s = 21$ МэВ, E — полная энергия электрона, $L_R$ — радиационная единица длины [7]. Из условия $T_s \gg L_{эф.}$ следует

$$E \gg \frac{E_s}{2}\sqrt{\frac{\omega L^2_{эф.}}{L_R}}.$$

Как видно из (16), соотношения (12) и (14) применимы вплоть до значения $(\cos 2\Theta_Б)^{-1} \sim 1 \div 100$. Таким образом, $(N^s_\tau)^{нак.}$ может в $10^2 \div 10^4$ раз превосходить $(N^\tau_s)^{нор.}$.

Аналогичная ситуация имеет место и для генерации ПРИ по геометрии Брэгга ($\vec{v}\vec{N} > 0$, $\vec{v}_\tau\vec{N} < 0$): остаются в силе соотношения (16)—(20) с заменой $\cos 2\Theta_Б$ на $|\cos 2\Theta_Б|$.

Авторы выражают благодарность В. Г. Барышевскому, А. О. Грубичу, И. Д. Феранчуку за интерес к работе и плодотворное обсуждение.

## Список литературы

1. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. Вып. 9. С. 944. Там же. 1973. Т. 64. Вып. 2. С. 760.
2. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1973. № 2. С. 102.
3. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. // Phys. Lett. 1976. V. 57A. N 2. P. 183.
4. Барышевский В. Г. Каналирование, излучение и реакции в кристаллах при высоких энергиях. Минск, 1982.
5. Baryshevsky V. G., Feranchuk I. D. // Journ. de Phys. 1983. V. 44. N 8. P. 913.
6. Пинскер З. Г. Динамическое рассеяние рентгеновских лучей в идеальных кристаллах. М., 1974.
7. Тер-Микаелян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях. Ереван, 1969.

Поступила в редакцию 20.04.87.

*УДК 530.12+530.145*

*Г. В. ШИШКИН, В. ВИЛЬЯЛЬБА*

# РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ДИРАКА ВО ВНЕШНИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯХ. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

1. Уравнение Дирака во внешних векторных полях изучалось многими авторами (см., например, [1—4], в том числе обширную библиогра-

фию в [3, 4]). Наиболее известны при этом следующие методики разделения переменных.

1) С учетом того факта, что «квадрированное» уравнение Дирака (для свободной частицы!) приводит к уравнению Клейна — Фока, в качестве первого этапа исследуются возможности разделения переменных в уравнении Клейна — Фока во внешнем векторном поле. При этом удается перечислить все возможные симметрии (геометрии) полей, в которых выполнимо разделение переменных, а затем для тех же геометрий полей изучаются возможности разделения переменных в уравнении Дирака. Заметим, однако, что, поскольку «квадрированное» уравнение Дирака при наличии полей содержит по сравнению с соответствующим уравнением Клейна — Фока лишние члены с производными от полевых функций, в указанном подходе предполагается обращение этих членов в нуль (дополнительные условия), и поэтому может быть высказано предположение, что возможности разделения переменных в уравнении Дирака и в уравнении Клейна — Фока при наличии полей не вполне идентичны.

2) Широкое распространение при разделении переменных в уравнении Дирака во внешних векторных полях [2] и в случае свободного движения [4] получил метод построения полного набора операторов, коммутирующих между собой и с оператором уравнения. Этот подход позволяет получать решения, соответствующие состояниям с полным набором одновременно определенных физических характеристик (иногда это полный набор интегралов движения). При таком подходе от внимания исследователя ускользает, что решение уравнения Дирака с разделившимися переменными может и не быть одновременно собственным для всех операторов, ответственных за зависимость дираковского биспинора от конкретных переменных, т. е. операторы, ответственные за отдельные переменные, могут и не коммутировать между собой.

Основываясь на этом, авторы [5, 6] предложили метод разделения переменных в уравнении Дирака применительно к гравитационным полям. Здесь мы приводим некоторую модификацию этого метода во внешних векторных полях. Для математической общности не накладываем на вектор-потенциал условия Лоренца. Это может быть сделано в конечных результатах при физических приложениях. В силу индивидуальной специфики в зависимости от используемых координат (декартовы либо общие криволинейные) в настоящей работе ограничиваемся декартовыми координатами.

Постоянная Планка, скорость света, заряд электрона приняты равными единице.

2. Уравнение Дирака в декартовых координатах запишем в виде

$$\{\gamma^i(\partial_i - iA_i) + \gamma^j(\partial_j - iA_j) + \gamma^m(\partial_m - iA_m) + \gamma^n(\partial_n - iA_n) + m_0\}\Psi - \{H\}\Psi = 0. \quad (1)$$

Здесь $A_i$, $A_j$, $A_m$, $A_n$ — компоненты вектор-потенциала. Для матриц Дирака приняты следующие коммутационные соотношения:

$$[\gamma^k, \gamma^l]_+ = 2I\eta^{kl}, \quad \eta^{kl} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1), \quad (2)$$

т. е. все матрицы эрмитовы. Одна из переменных при этом мнимая (для общности рассмотрения ее не конкретизируем). С точностью до мнимой единицы определена и соответствующая компонента вектор-потенциала.

Необходимо иметь в виду следующие возможности разделения переменных в уравнении Дирака (1).

**Разделение по схеме:** $x^i$ отделяем от $x^j$, $x^m$, $x^n$; $x^j$ отделяем от $x^m$, $x^n$; наконец, разделяем $x^m$ и $x^n$.

Для последовательных этапов разделения, согласно [5, 6], при этом имеем

$$\{H\}\Psi \Rightarrow \{H\}\Gamma\Gamma^{-1}\Psi \Rightarrow [\widehat{K}_i + \widehat{K}_{jmn}]\Phi, \quad \Psi = \Gamma\Phi; \quad (3)$$

$$(\widehat{K}_i + \widehat{K}_{jmn})\,\Phi = 0, \quad \widehat{K}_i\widehat{K}_{jmn} - \widehat{K}_{jmn}\widehat{K}_i = 0. \tag{4)—(5}$$

Здесь $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_{jmn}$ — операторы, ответственные за зависимость биспинора $\Phi$ от $x^i$ и $x^j$, $x^m$, $x^n$ соответственно; $\Gamma$ — некоторая матрица, подлежащая определению.

Далее, поскольку

$$\widehat{K}_i\Phi = -\widehat{K}_{jmn}\Phi = k^i\Phi, \tag{6}$$

следуем схеме ($k^i$ — собственное значение операторов)

$$(\widehat{K}_{jmn} + k^i)\,\Phi \Rightarrow (\widehat{K}_{jmn} + k^i)\,\Lambda\Lambda^{-1}\Phi \Rightarrow (\widehat{K}_j + \widehat{K}_{mn})\,\Theta, \;\; \Phi = \Lambda\Theta; \tag{7}$$

$$(\widehat{K}_j + \widehat{K}_{mn})\,\Theta = 0, \quad \widehat{K}_j\widehat{K}_{mn} - \widehat{K}_{mn}\widehat{K}_j = 0. \tag{8)—(9}$$

Обозначения понятны по аналогии с (3) — (5).

И, наконец,

$$(\widehat{K}_{mn} + k^j)\,\Theta \Rightarrow (\widehat{K}_{mn} + k^j)\,\sum\sum^{-1}\Theta \Rightarrow (\widehat{K}_m + \widehat{K}_n)\,\Omega, \;\; \Theta = \sum\Omega; \tag{10}$$

$$(\widehat{K}_m + \widehat{K}_n)\,\Omega = 0, \quad \widehat{K}_m\widehat{K}_n - \widehat{K}_n\widehat{K}_m = 0. \tag{11)—(12}$$

В задаче (6) решения могут быть записаны в виде произведения коммутирующих между собой матриц, зависящих от разделившихся переменных, на единичный биспинор (справа).

В отличие от (6) доумножение операторов на матрицу с целью разделения переменных производится слева благодаря чему, учитывая (3), (7), (10), после решения уравнений вида (6) по соответствующим операторам легко восстанавливаем биспинор:

$$\Psi = \Gamma \boldsymbol{A}\,(x^i)\,\Lambda \boldsymbol{B}\,(x^j) \sum \boldsymbol{C}\,(x^m)\,\boldsymbol{D}\,(x^n)\,J, \tag{13}$$

где $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$ — диагональные матрицы; $J$ — единичный биспинор. Переменные разделены:

**Разделение по схеме:** $x^i$, $x^j$ отделяем от $x^m$, $x^n$; затем $x^i$, $x^j$ (аналогично $x^m$, $x^n$) разделяем между собой.

Соответствующие этапы разделения выполняем согласно

$$\{H\}\,\Psi \Rightarrow \{H\}\,\Gamma\Gamma^{-1}\Psi \Rightarrow (\widehat{K}_{ij} + \widehat{K}_{mn})\,\Phi, \;\; \Psi = \Gamma\Phi; \tag{14}$$

$$(\widehat{K}_{ij} - k)\,\Phi \Rightarrow (\widehat{K}_{ij} - k)\,\Lambda\Lambda^{-1}\Phi \Rightarrow (\widehat{K}_i + \widehat{K}_j)\,\Theta, \;\; \Phi = \Lambda\Theta; \tag{15}$$

$$(\widehat{K}_{mn} + k)\,\Phi \Rightarrow (\widehat{K}_{mn} + k)\,\sum\sum^{-1}\Phi \Rightarrow (\widehat{K}_m + \widehat{K}_n)\,\Omega, \;\; \Phi = \sum\Omega. \tag{16}$$

Вместо (13) при этом имеем:

$$\begin{gathered} \Lambda \boldsymbol{A}\,(x^i)\,\boldsymbol{B}(x^j)\,J = \boldsymbol{B}\,(x^i,\; x^j)\,J, \\ \sum \boldsymbol{C}\,(x^m)\,\boldsymbol{D}(x^n)\,J = \boldsymbol{D}(x^m,\; x^n)\,J, \\ \Psi = \Gamma \boldsymbol{B}\,(x^i,\; x^j)\,\boldsymbol{D}\,(x^m,\; x^n)\,J. \end{gathered} \tag{17}$$

3. Остановимся для уяснения предлагаемого метода подробно на одном этапе разделения (3) — (5).

Для выполнения (5) необходимо потребовать

$$A_k = (x^i,\; x^j,\; x^m,\; x^n) = \widetilde{A}_k\,(x^i) + B_k\,(x^j,\; x^m,\; x^n), \;\; k = i,\, j,\, m,\, n. \tag{18}$$

Конструируя наиболее общую форму операторов $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_{jmn}$,

$$\widehat{K}_i = \{\gamma^i\,(\partial_i - i\widetilde{A}_i) - i\gamma^j\widetilde{A}_j - i\gamma^m\widetilde{A}_m - i\gamma^n\widetilde{A}_n + \alpha m_0\}\,\Gamma, \tag{19}$$

$$\widehat{K}_{jmn} = \{-\,i\gamma^i B_i + \gamma^j(\partial_j - iB_j) + \gamma^m(\partial_m - iB_m) + \gamma^n(\partial_n - iB_n) + \beta m_0\}\,\Gamma, \tag{20}$$

$$\alpha + \beta = 1 \tag{21}$$

и подчиняя их требованию (5), получаем следующую систему уравнений:

$$\gamma^i\Gamma\gamma^j-\gamma^j\Gamma\gamma^i=0,\ \ \gamma^i\Gamma\gamma^m-\gamma^m\Gamma\gamma^i=0,$$
$$\gamma^i\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma\gamma^i=0;$$

$$\begin{gathered}
(\gamma^j\Gamma\gamma^m-\gamma^m\Gamma\gamma^j)\tilde{A}_j=0,\ \ (\gamma^i\Gamma-\Gamma\gamma^i)\,\beta=0,\\
(\gamma^j\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma\gamma^j)\tilde{A}_jB_m=0,\ \ (\gamma^i\Gamma-\Gamma\gamma^i)\,\beta\tilde{A}_i=0,\\
(\gamma^j\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma\gamma^j)\tilde{A}_j=0,\ \ (\gamma^j\Gamma-\Gamma\gamma^j)\,\beta\tilde{A}_j=0,\\
(\gamma^j\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma\gamma^j)\tilde{A}_jB_n=0,\ (\gamma^n\Gamma-\Gamma\gamma^n)\,\beta A_m=0,\\
(\gamma^n\Gamma\gamma^j-\gamma^j\Gamma\gamma^n)\tilde{A}_m=0,\ \ (\gamma^n\Gamma-\gamma^n\Gamma)\,\beta\tilde{A}_n=0,\\
(\gamma^m\Gamma\gamma^j-\gamma^j\Gamma\gamma^m)\tilde{A}_mB_j=0,\ \ (\Gamma\gamma^i-\gamma^i\Gamma)\,\alpha B_i=0,\\
(\gamma^i\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma\gamma^n)\tilde{\tilde{A}}_m=0,\ \ (\Gamma\gamma^j-\gamma^j\Gamma)\alpha=0,\\
(\gamma^m\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma\gamma^m)\tilde{A}_mB_n=0,\ \ (\Gamma\gamma^j-\gamma^j\Gamma)\,\alpha B_j=0,\\
(\gamma^n\Gamma\gamma^j-\gamma^j\Gamma\gamma^n)\,\tilde{A}_n=0,\ \ (\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma)\,\alpha=0,\\
(\gamma^n\Gamma\gamma^j-\gamma^j\Gamma\gamma^n)\tilde{A}_nB_j=0,\ \ (\Gamma\gamma^m-\gamma^m\Gamma)\,\alpha B_m=0,\\
(\gamma^n\Gamma\gamma^m-\gamma^m\Gamma\gamma^n)\tilde{A}_n=0,\ \ (\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma)\,\alpha=0,\\
(\gamma^n\Gamma\gamma^m-\gamma^m\Gamma\gamma^n)\tilde{A}_nB_m=0,\ \ (\Gamma\gamma^n-\gamma^n\Gamma)\,\alpha B_n=0.
\end{gathered}\tag{22}$$

Чисто матричные уравнения этой системы допускают лишь два решения:

$$\text{а)}\ \ \Gamma=\gamma^i,\quad \text{б)}\ \ \Gamma=\gamma^j\gamma^m\gamma^n.\tag{23}$$

Привлекая к рассмотрению всю систему уравнений (22), имеем две возможности разделения переменных $x^i$ от $x^j$, $x^m$, $x^n$:

а) $\Gamma=\gamma^i$.

$$A_i=\tilde{A}_i+B_i,\ \ A_j=B_j,\ \ A_m=B_m,\ \ A_n=B_n;\tag{24}$$

$$\begin{cases}\hat{K}_i=\partial_i-i\tilde{A}_i,\\ \hat{K}_{jmn}=\{-i\gamma^iB_i+\gamma^j(\partial_j-iB_j)+\gamma^m(\partial_m-iB_m)+\gamma^n(\partial_n-iB_n)+m_0\}\,\gamma^i.\end{cases}\tag{25}$$

б) $\Gamma=\gamma^j\gamma^m\gamma^n$.

$$A_i=\tilde{A}_i,\ \ A_j=B_j,\ \ A_m=B_m,\ \ A_n=B_n;\tag{26}$$

$$\begin{cases}\hat{K}_i=\{\gamma^i(\partial_i-i\tilde{A}_i)+m_0\}\,\gamma^j\gamma^m\gamma^n,\\ \hat{K}_{jmn}=\{\gamma^j(\partial_j-iB_j)+\gamma^m(\partial_m-iB_m)+\gamma^n(\partial_n-iB_n)\}\,\gamma^j\gamma^m\gamma^n.\end{cases}\tag{27}$$

Обратными рассуждениями можно показать, что условия (24), (26) являются и достаточными для разделения $x^i$ от $x^j$, $x^m$, $x^n$. Останавливаясь на наиболее мягких условиях, можно сформулировать теорему.

**Теорема 1.** Для того чтобы в уравнении (1) произошло разделение переменных $x^i$ от $x^j$, $x^m$, $x^n$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-потенциал удовлетворял условиям:

$$\begin{gathered}A_i=\tilde{A}_i\,(x^i),\ \ A_j=B_j\,(x^j,\ x^m,\ x^n),\ \ A_n=B_m\,(x^j,\ x^m,\ x^n),\\ A_n=B_n\,(x^j,x^m,x^n).\end{gathered}\tag{28}$$

Аналогично устанавливаются следующие теоремы.

**Теорема 2.** Для того чтобы в уравнении (1) произошло разделение переменных $x^i$ от $x^j$, $x^m$, $x^n$ и затем $x^j$ от $x^m$, $x^n$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-потенциал удовлетворял одному из наборов условий:

$$\text{а)}\ A_i = \widetilde{A}_i(x^i) + B_i(x^j),\ A_j = \widetilde{B}_j(x^j),\ A_m = C_m(x^m, x^n),\ A_n = C_n(x^m, x^n); \tag{29}$$

$$\text{б)}\ A_i = A_i(x^i) + C_i(x^m, x^n),\ A_j = \widetilde{B}_j(x^j) + C_j(x^m, x^n),\ A_{m,n} = C_{m,n}(x^m, x^n).$$

**Теорема 3.** Для полного разделения переменных в уравнении (1) по схеме $x^i$ от $x^j$, $x^m$, $x^n$, затем $x^j$ от $x^m$, $x^n$, наконец, $x^m$ от $x^n$, необходимо и достаточно, чтобы вектор-потенциал удовлетворял одному из наборов условий:

$$\text{а)}\ A_i = \widetilde{A}_i(x^i + D_i(x^n),\ A_j = \widetilde{B}_j(x^j) + \widetilde{C}_j(x^m),\ A_m = \widetilde{C}_m(x^m),\ A_n = \widetilde{D}_n(x^n) \tag{30}$$

$$\text{б)}\ A_i = \widetilde{A}_i(x^i) + \widetilde{C}_i(x^m),\ A_j = \widetilde{B}_j(x^j) + \widetilde{C}_j(x^m),\ A_m = \widetilde{C}_m(x^m),\ A_n = \widetilde{D}_n(x^n).$$

$$\text{в)}\ A_i = \widetilde{A}_i(x^i) + \widetilde{D}_i(x^n),\ A_j = \widetilde{B}_j(x^j) + \widetilde{D}_j(x^n),\ A_m = \widetilde{C}_m(x^m) + \widetilde{D}_m(x^n),$$
$$A_n = \widetilde{D}_n(x^n).$$

**Теорема 4.** Для попарного разделения переменных в уравнении (1) ($x^i$, $x^j$ от $x^m$, $x^n$) необходимо и достаточно, чтобы вектор-потенциал удовлетворял условиям:

$$A_i = B_i(x^i, x^j),\ A_j = B_j(x^i, x^j),\ A_m = D_m(x^m, x^n),\ A_n = D_n(x^m, x^n). \tag{31}$$

**Теорема 5.** Для полного разделения переменных в уравнении (1) по схеме $x^i$, $x^j$ от $x^m$, $x^n$ и затем $x^i$ от $x^j$ и $x^m$ от $x^n$ необходимо и достаточно, чтобы вектор-потенциал удовлетворял условиям:

$$A_i = \widetilde{A}_i(x^i) + \widetilde{B}_i(x^j),\ A_j = \widetilde{B}_j(x^j),\ A_m = \widetilde{C}_m(x^m) + \widetilde{D}_m(x^n),\ A_n = \widetilde{D}_n(x^n). \tag{32}$$

Здесь, естественно, имеет место симметрия относительно полной либо частичной замены $i, j \rightleftarrows m, n$, $i \rightleftarrows j$, $m \rightleftarrows n$.

Наконец, замечая, что условия теоремы 5 включены в условия теоремы 3, имеем возможность сформулировать обобщающую теорему.

**Теорема 6.** Для реализации хотя бы одной из возможностей разделения переменных в уравнении (1) необходимо и достаточно, чтобы вектор-потенциал удовлетворял одному из наборов условий (30).

**4.** Результаты п. 3 отражают все возможности разделения переменных в уравнении Дирака в векторных полях в декартовых координатах выделением матрично-дифференциальных операторов первого порядка. Анализ показывает, что все частные результаты, в которых используется формализм операторов первого порядка, включены в наши, чего нельзя сказать о результатах, полученных в формализме дифференциальных операторов второго порядка, что подтверждает высказанное в п. 1 предположение о возможной неидентичности формализмов первого и второго порядков. Заметим, правда, что в случае свободного движения даже в криволинейных координатах может быть доказана идентичность этих формализмов [4].

В предложенном здесь формализме из утверждения

$$\{H\}\Gamma\Gamma^{-1}\Psi = 0 \Rightarrow (\widehat{K}_\alpha + \widehat{K}_\beta)\Phi = 0,\ [\widehat{K}_\alpha, \widehat{K}_\beta] = 0 \tag{33}$$

также следует

$$(\widehat{K}_\alpha - \widehat{K}_\beta)(\widehat{K}_\alpha + \widehat{K}_\beta)\Phi = 0 \Rightarrow (\widehat{K}_\alpha^2 + \widehat{K}_\beta^2)\Phi = 0. \tag{34}$$

Однако мы не можем утверждать справедливости обратного, так как могут существовать операторы второго порядка, не являющиеся квадратами каких-либо операторов первого порядка.

Остановимся на моментах, которые необходимо иметь в виду при использовании полученных результатов.

Условия полного разделения переменных (30), в частности, допускают вектор-потенциал вида

$$A_i = \widetilde{A}_i(x^i) + \widetilde{D}_i(x^n),\ A_j = \widetilde{A}_j(x^j) + \widetilde{D}_j(x^n),\ A_m = \widetilde{C}_m(x^m) + \widetilde{D}_m(x^n),$$
$$A_n = \widetilde{D}_n(x^n). \tag{35}$$

Есть и другие возможности, где, как и здесь, каждая компонента вектор-потенциала лишь аддитивно содержит зависимость от соответствующей координатной (временной) переменной. В таких случаях в уравнении (1) возможно упрощение согласно

$$\Psi = \widetilde{\Psi} \exp\{i\int A_i dx^i + i\int B_j dx^j + i\int C_m dx^m + i\int D_n dx^n\}, \tag{36}$$

и уже по отношению к уравнению для $\widetilde{\Psi}$ применяем наши результаты.

Условия теоремы 6 требуют, чтобы компоненты вектор-потенциала представляли собой суммы функций от разделившихся переменных. Однако физические поля могут иметь иную, более общую структуру. Например, в случае плоской монохроматической электромагнитной волны имеем

$$A_x = Ae^{i(kz-\omega t)} = Ae^{i\omega(z-t)}\quad (c=1). \tag{37}$$

Здесь волна распространяется вдоль $z$ и учтен факт поперечной поляризации. В таких случаях, переходя к новым переменным, удается зачастую свести вектор-потенциал к форме (30) с сохранением вида уравнения (1). Но при такой замене перемешиваются пространственно- и времениподобная переменные, в связи с чем $\gamma$-матрицы при соответствующих членах в уравнении (1) могут не обладать определенной эрмитовостью и даже оказаться вырожденными. В случае (37) эта неприятность возникает при переходе к широко используемым в электродинамике переменным:

$$u = z - t,\quad v = z + t. \tag{38}$$

В остальном, если форма уравнения (1) сохранилась, возможно использование предложенной методики разделения переменных. Следует лишь проявлять осторожность при работе с вырожденными матрицами.

В случае (37) для уравнения Дирака имеем

$$\{\gamma^1(\partial_x - iA(u)) + \gamma^2\partial_y + \gamma^u\partial_u + \gamma^v\partial_v + m_0\}\Psi = 0, \tag{39}$$

где

$$\gamma^u = \gamma^3 - \gamma^4,\ \gamma^v = \gamma^3 + \gamma^4. \tag{40}$$

Здесь матрицы $\gamma^u$, $\gamma^v$ вырождены.

Отделяя последовательно $x$, $y$, $v$, в представлении

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^2 = i\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^4 = i\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$$

удается получить точное решение:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix},\ \Psi_2 = \frac{ik_y + m}{k}\Psi_1,\ \Psi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\ k^2 = k_y^2 + m_0^2,$$

$$\varphi_1 = \exp\left\{-\frac{i}{4}\int\{(k_x + A(u))^2 + k^2\}\,du\right\},\ \varphi_2 = -\frac{i}{2k_x}\{k - i(k_x + A(u))\}\varphi_1,$$

известное как решение Волкова.

В заключением отметим, что развитый здесь подход к разделению переменных в уравнении Дирака ограничен рамками декартовых координат, и соответствующие поля имеют «плоскую» симметрию. Естественно, что природа векторных полей более разнообразна, поэтому для полного освещения проблемы необходимы дальнейшие исследования в общеортогональных криволинейных координатах.

## Список литературы

1. Багров В. Г., Шаповалов и др. // Изв. вузов СССР: Физика. 1973. № 7. С. 95; 1975. № 4. С. 29; 1975. № 7. С. 6; 1975. № 8. С. 73; 1975. № 9. С. 106; 1977. № 6. С. 105; 1977. № 7. С. 46; 1978. № 2. С. 13; 1978. № 3. С. 46; 1980. № 4. С. 10; 1984. № 12. С. 33; 1985. № 1. С. 85.
2. Шаповалов В. Н., Багров В. Г., Экле Г. Г. Полные наборы и разделение переменных в уравнении Дирака / Изв. вузов СССР: Физика. Томск, 1976. 26 с. Деп. в ВИНИТИ 19.01.76. № 405-75.
3. Cook A. H. // Proc. Roy. Soc. London, 1982. V. A384. P. 247.
4. Kalnins E. G., Miller W., Williams G. C. // Journ. Math. Phys. 1986. P. 1983.
5. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1985. № 3. С. 26; 1986. № 1. С. 6; 1986. № 2. С. 5; 1986. № 3. С. 3.
6. Андрушкевич И. Е., Шишкин Г. В. // ТМФ. 1987. Т. 70. С. 289.


Поступила в редакцию 19.04.87.

*УДК 621.396*

*Н. И. АЛЕШКЕВИЧ, А. С. КЛЮЧНИКОВ, В. И. КОНДРАТЕНКО*

# ОПТИЧЕСКОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ СВЧ-ГОЛОГРАММ

Оптические методы обработки информации перспективны для двумерных систем, в частности для обработки оптических изображений, СВЧ-голограмм, благодаря их чрезвычайно высокому быстродействию, связанному с параллельностью обработки информации, простоте ввода информации и возможности представления ее в аналоговом виде и т. д. Тем не менее эти методы практически не нашли применения в технике СВЧ-голографии из-за существенных масштабных искажений при оптическом восстановлении СВЧ-голограмм [1]. Корректно решить задачу неискаженного моделирования СВЧ-полей традиционным методом восстановления голограмм технически невозможно [2, 3], так как необходимо уменьшить исходную голограмму при ее оптической записи в $n=\lambda_1/\lambda_2=10^4\div10^5$ раз ($\lambda_1$ и $\lambda_2$ — длина волны записи и восстановления голограммы соответственно). При таком коэффициенте уменьшения размеры элемента дискретизации синтезированной голограммы (оптического аналога СВЧ-голограмм) оказываются столь малыми, что становятся неизбежными потери высокочастотных составляющих в спектре, и, следовательно, появляются искажения в моделируемом поле. Действительно, максимальная пространственная частота в плоскости записи СВЧ-голограммы определяется расстоянием между отдельными элементами излучающей системы [4], которое является величиной, заведомо меньшей длины волны излучения. Для выполнения масштабного соответствия необходимо, чтобы данное соотношение сохранялось и в синтезированной оптической голограмме. Однако в силу ограниченности частотной функции свободного пространства при регистрации уменьшенной голограммы на светочувствительной среде, расположенной в фокусе оптической системы, производящей уменьшение голограммы, происходит низкочастотная пространственная фильтрация, приводящая к потере в структуре распределения элементов с размерами, меньшими длины волны света, применяемого при регистрации оптического изображения, и соответственно — к потере высокочастотных компонент в восстановленном изображении.

В настоящее время исследована возможность оптического восстановления СВЧ-голограмм с сохранением соответствия между продольным и поперечным масштабами преобразования изображения. Разработан принципиально новый подход к восстановлению СВЧ-голограмм в видимом диапазоне, включающий операцию коррекции поперечного масштаба преобразования оптическими методами и позволяющий отказаться от применения голограмм со «сверхвысоким» разрешением.

Рассмотрим классическую схему записи СВЧ-голограммы, при которой плоскость излучающего (рассеивающего) объекта располагается параллельно плоскости регистрации и отстоит от нее на расстоянии $D_1$,