Список литературы

1. Fischetti M., Nartello S. // Math. programming. 1987. V. 33. № 1. P. 111.
2. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987.
3. Гляков П. В. // Программное обеспечение ЭВМ. Минск, 1985. Вып. 63. С. 69.

Поступила в редакцию 22.04.88.

УДК 512.64

ФАМ ВЬЕТ ХУНГ

ПОДАЛГЕБРА, СОДЕРЖАЩАЯ ДАННУЮ МАТРИЦУ

Настоящая работа посвящена проблеме размерности коммутативных нильпотентных подалгебр матричной алгебры $M(n, K)$, содержащих данную матрицу. Она тесно связана не только с задачей Фробениуса [1] (см. также [2, гл. 1, § 3]), но и с недавней задачей Густафсона [3, проблема b] о максимальной размерности коммутативных подалгебр алгебры $M(n, K)$. Главным результатом работы является

Теорема 1. Пусть $A = [I_{s_1}, I_{s_2}, \ldots, I_{s_t}]$, $s_1 + \ldots + s_t = n$, $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_t \geqslant 1$, где I_s — Жорданова клетка порядка s с единицами на позициях $(i, i+1)$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$ и нулями на других. Тогда точной верхней границей для размерности коммутативных нильпотентных подалгебр алгебры $M(n, K)$, содержащих A, является

$$s-1+\alpha(s_{\alpha+1}+\ldots+s_t)+(\alpha-1)\sum_{i=2}^{\alpha}(s_i-s_{\alpha+1})+$$
$$+(\alpha-1)\min\{s_1-s_{\alpha+1},\ s_{\alpha+1}\},$$

где $\alpha=[(t+1)/2]$.

В частности, при $s_1 = s_2 = \ldots = s_t = I$ теорема имеет следующую известную формулировку.

Предложение [6]. Пусть K — произвольное поле. Точной верхней границей для размерности коммутативных нильпотентных подалгебр алгебры $M(n, K)$ является $[n^2/4]$.

Доказательство. Рассматривается только случай, когда $s_1 = s_2 = \ldots s_t = s$. Общий случай показывается аналогично. Пусть $A = \underbrace{[I_s, \ldots, I_s]}_{t}$, $ts = n$. Согласно [2, гл. 1, § 3], все матрицы, перестановочные с A, имеют вид

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1t} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{t1} & b_{t2} & \ldots & b_{tt} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где b_{ij} — треугольно-полосатая $s \times s$ — матрица, $1 \leqslant i, j \leqslant t$. Перепишем

$$b_{ij}=\lambda_{ij}E+\bar{b}_{ij},\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant t, \tag{2}$$

где E — единичная матрица порядка s и $\bar{b}_{ij}$ — матрица с нулями на диагонали (т. е. является нильпотентной матрицей).

Пусть N — произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра, содержащая A. Предположим, что все элементы $B \in N$ имеют вид (1)—(2). Обозначим $N_1 = \{(\lambda_{ij}), B \in N\}$. Легко показать, что N_1 является коммутативной нильпотентной подалгеброй алгебры $M(t, K)$. Предположим далее, что N_1 имеет сигнатуру Кравчука (α, m, β). Тогда, как показано в [2, г. 2, § 10], $\dim \leqslant N_1 \leqslant \alpha(t-\alpha)$. Далее, если в N существует матрица $B = (b_{ij})$ с $\lambda_{i_0 j_0} \neq 0$ при некотором (i_0, j_0), $i_0 \neq j_0$, то для подходящего элемента $\lambda \in K$ матрица $B' = B + \lambda BA \in N$ имеет вид $B' = (b'_{ij})$ с $\lambda'_{i_0 j_0} \neq 0$, $b'_{i_0 j_0} \neq \nparallel 0$. Отсюда

$$\dim N \leqslant \alpha(t-\alpha)+\alpha(t-\alpha)(s-1)+(s-1)\leqslant$$
$$\leqslant s-1+\alpha(t-\alpha)s\leqslant s-1+[t^2/4]s.$$

Остается показать, что эта граница является точной. Обозначим через N множество всех матриц вида (1)—(2), имеющих $b_{ij}=0$ при $(i, j) \notin I$, где $I=\{(i, i), 1 \leqslant i \leqslant t\} \cup \{i, j), 1 \leqslant i \leqslant \alpha, \alpha+1 \leqslant j \leqslant t\}$ и $\lambda_{ii}=0$, $\bar{b}_{ii}=\bar{b}_{jj}$ при $1 \leqslant i, j \leqslant t$. Тогда N является коммутативной нильпотентной подалгеброй, содержащей A, и $\dim N=s-1+[t^2/4]s$. Теорема доказана.

Приступим теперь к рассмотрению задачи Густафсона [3].

Определение. Индексом (соответствующим классом) нильпотентной алгебры N называется наименьшее целое число k такое, что $B^k=0$, $B \in N$ $(N^k = 0)$.

Лемма 1. Пусть K — произвольное поле и k, n — целые числа, $2 \leqslant k \leqslant n$. Точной верхней границей для размерности коммутативных нильпотентных подалгебр алгебры $M(n, K)$ индекса k является $k-2+[(n-k+2)^2/4]$.

Доказательство. Пусть N — произвольная коммутативная нильпотентная подалгебра алгебры $M(n, K)$ индекса k. По определению, в N существует матрица A, $A^{k-1} \neq 0$. С использованием подобия можем предполагать, что $A = [I_{s_1}, \ldots, I_{s_t}]$, $s_1+\ldots+s_t=n$, $s_1 \geqslant \ldots \geqslant s_t \geqslant 1$. Согласно теореме 1,

$$\dim N \leqslant s_1 - 1 + \alpha(s_{\alpha+1} + \ldots + s_t) + $$
$$+ (\alpha-1)\sum_{i=2}^{\alpha}(s_i - s_{\alpha+1}) + (\alpha-1)\min\{s_1 - s_{\alpha+1},\ s_{\alpha+1}\},$$

где $\alpha=[(t+1)/2]$.

Отсюда можно показать, что

$$\dim N \leqslant s_1-2+[(n-s_1+2)^2/4].$$

С другой стороны, из $A^{k-1} \neq 0$, $A^k=0$ следует, что $s_1=k$. Значит,

$$\dim N \leqslant k-2+[(n-k+2)^2/4].$$

Остается показать, что эта граница является точной. Обозначим через N подалгебру, порожденную элементами $a=e_{12}+e_{23}+\ldots+e_{k-1,k}$, e_{1i} и e_{jk}, $n-k-\alpha+1 \leqslant i \leqslant n$, $k+1 \leqslant j \leqslant k+\alpha$, где $\alpha=[(n-k)/2]$, а e_{ij} — элементарная матрица с единицей на позиции (i, j) и нулями на других. Тогда N является коммутативной нильпотентной подалгеброй алгебры $M(n, K)$ индекса k. Так как $\dim N=k-1+n-k-\alpha+\alpha+[(n-k)^2/4]=k-2+[(n-k+2)^2/4]$, вышеуказанная граница является достижимой. Лемма доказана.

Так как индекс нильпотентной алгебры всегда не превосходит ее класса, из леммы 1 следует

Лемма 2 [4, 5]. Пусть K — произвольное поле и k, n — целые числа, $2 \leqslant k \leqslant n$. Точной верхней границей для размерности коммутативных нильпотентных подалгебр алгебры $M(n, K)$ класса k является $k-2+[(n-k+2)^2/4]$.

Следующий результат является обобщением теоремы Шура [6] и тем самым является решением задачи Густафсона [5, проблема b].

Теорема 2. Пусть K — произвольное поле и k, n — целые числа, $2 \leqslant k \leqslant n$. Точной верхней границей для размерности коммутативных подалгебр алгебры $M(n, K)$, имеющих радикалы класса (индекса) k, является $k-1+[(n-k+2)^2/4]$.

Доказательство. Используем метод доказательства Супруненко—Тышкевич [2, гл. 2, § 10]. Пусть N — коммутативная подалгебра, имеющая радикал класса (индекса) k. Предположим, что $N=N_1 \oplus N_2$, где N_i имеет нильпотентный класс (индекс) k_i. Тогда $k_i \leqslant k$ и $\max\{k_1, k_2\}=k$. Пусть $k_1=k$. Обозначим $n_i=\dim N_i$. Согласно леммам 1, 2, имеем

$$\dim N = \dim N_1 + \dim N_2 \leqslant k - 1 + [(n_1 - k + 2)^2/4] + 1 + $$
$$+ [n_2^2/4] \leqslant k - 1 + [(n - k + 2)^2/4].$$

Отсюда, с использованием аргумента Супруненко—Тышкевич [2, гл. 2,

§ 10], можем показать, что $k-1+[(n-k+2)^2/4]$ является верхней границей. Далее, построенный при доказательстве леммы 1 пример показывает, что эта граница является достижимой. Теорема доказана.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
2. Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. Минск, 1966.
3. Gustafson W. H. // Journ. Algebra. 1976. V. 42. № 2. P. 557.
4. Ляттэ В. А. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1980. № 5. С. 28.
5. Фам Вьет Хунг. Там же. 1987. № 3. С. 110.
6. Schur I. // Journ. Reine Angew. Math. 1905. B. 130. S. 66.

Поступила в редакцию 14.03.88.

УДК 519.7

М. Х. ФАХМИ

О ГОМОМОРФИЗМАХ ОДНОЙ АЛГЕБРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе [1] полностью описаны конгруэнции на итеративной алгебре Поста и некотором семействе ее подалгебр. Основываясь на этих результатах, в [2] получено описание конгруэнций на $\boldsymbol{P}_k$. В данной статье показано, что все найденные в [2] конгруэнции, отличные от равенства, определяют гомоморфизмы алгебры $\boldsymbol{P}_k$ в итеративную алгебру Поста подходящей значности.

Перейдем к точным определениям и формулировкам.

Пусть X — конечное непустое множество, X^* обозначает полугруппу слов на X. Последовательностная ограниченно-детерминированная функция $F: X^+ \to Y^+$ может быть описана бесконечной последовательностью функций $(\varphi_F^1 \varphi_F^2 \ldots \varphi_F^m \ldots)$, где $\varphi_E^i : X^i \to Y$ так, что на слове $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ функция F вычисляется следующим образом:

$$F(a_1 a_2 \ldots a_n) = \varphi_F^1(a_1)\, \varphi_F^2(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n).$$

Пусть $n \geqslant 1$, $n \in N$, P_k будет обозначать множество последовательностных функций арности n, которые отображают $(X_n)^+$ в X^+, т. е. алфавитом входов таких функций является множество всех слоев длины n над X, $P_X = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} P_k^n$ — носитель алгебры P_X.

Далее везде предполагается, что $X = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ и $P_X = P_k$.

Операции ξ, τ, $\triangle$, ∇, $*$ сигнатуры алгебры $\boldsymbol{P}_k$ определяются следующим образом:

$$(\xi F)(p_1 p_2 \ldots p_n) = F(p_2 p_3 \ldots p_n p_1),\quad (\tau F)(p_1 p_2 \ldots p_n) = F(p_2 p_1 \ldots p_n),$$
$$(\Delta F)(p_1 p_2 \ldots p_{n-1}) = F(p_1 p_1 \ldots p_{n-1}),\quad (\nabla F)(p_1 p_2 \ldots p_{n+1}) = F(p_2 \ldots p_{n+1}),$$
$$(F * G)(p_1 \ldots p_m \ldots p_{m+n-1}) = F(G(p_1 \ldots p_m),\ p_{m+1} \ldots p_{m+n-1}),$$

где F, G произвольны; n и m — арность функций из P_k, p_i, $i = 1, 2, \ldots$; $m+n-1$,— слова, поступающие на i-й вход, причем все слова имеют одну и ту же длину.

Если F — одноместная функция, то $\xi F = \tau F = \Delta F = \nabla F = F$.

Конгруэнцией на алгебре $\boldsymbol{P}_k$ называется отношение эквивалентности на этой алгебре, сохраняющееся при всех операциях из сигнатуры алгебры.

На алгебре $\boldsymbol{P}_k$ и всех ее подалгебрах, как и на любой алгебре, имеются две тривиальные конгруэнтности χ_0, χ_1, где χ_0 совпадает с отношением равенства, а χ_1 — с тождественным истинным отношением.

Помимо конгруэнций χ_0, χ_1, существует на алгебре $\boldsymbol{P}_k$ еще одна конгруэнция $\chi_2 : (F, G) \in \chi_2 \leftrightarrow$ арность F равна арности G. На $\boldsymbol{P}_k$ также имеется семейство конгруэнций R_m, $(F, G) \in R_m \leftrightarrow \varphi_F^i = \varphi_G^i$ для $i \leqslant m$.