Обобщив доказанное, можно сформулировать следующее: любая грамматика $G' \in K_2$ может быть преобразована в любую другую грамматику $G'' \in K_2$, что $L(G') = L(G'')$.

Оценим сложность алгоритмов сводимости грамматик друг к другу. Для этого введем следующие обозначения: пусть t_1 — количество правил грамматики G'; t_2 — количество правил грамматики G'', полученной при $G' \to G''$, причем $L(G') = L(G'')$, n_1 — мощность множества V_N^1; тогда $t_2 \leqslant t_1 \max\{m_1, m_2, \ldots, m_{n_1}\}$, где $i = \overline{1, n_1}$; $m_i = \{\varphi_i \in \overline{V}_N^1 \mid \overline{V}_N^1 = V_N^1 \setminus \{\varphi_i\}\}$.

Из доказанного следует, что сложность любого из рассмотренных алгоритмов преобразования грамматик друг к другу — $Q(t_1 + n_1)$, т. е. практически зависит от количества правил и нетерминальных символов искомой грамматики.

Список литературы

1. Певзнер Л. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1983. № 3. С. 43.

2. Вельбицкий И. В., Ходаковский В. Н., Шолмов Л. И. Технологический комплекс производства программ на машинах ЕС ЭВМ, БЭСМ-6. М., 1980.

3. Розенкранц Д. // Сб. переводов по вопросам информационной теории и практики / ВИНИТИ. 1970. № 16.

4. Ахо А. // Языки и автоматы / Под ред. А. Н. Маслова и Э. Д. Стоцкого. М., 1975.

5. Певзнер Л. В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1979. № 2. С. 46.

6. Глушков В. М. и др. Алгебра. Языки. Программирование. Киев, 1975.

Поступила в редакцию 01.07.87.

УДК 519.854.2

В. А. СТРУСЕВИЧ

УЛУЧШЕННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫБОРА СКОРОСТЕЙ ПРИБОРОВ ДЛЯ ДВУХСТАДИЙНОЙ СИСТЕМЫ СМЕШАННОГО ТИПА

В систему, состоящую из двух приборов A и B, в момент времени $d = 0$ поступает множество $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ требований. Предполагается, что скорости приборов заранее не заданы. Если скорость прибора L равна $v_L > 0$, то длительность обслуживания требования $i \in N$ этим прибором равна $w_L t_{iL}$, где $w_L = 1/v_L$, $L \in \{A, B\}$, $t_{iA} = a_i \geqslant 0$, $t_{iB} = b_i \geqslant 0$.

Множество N требований разбито на два подмножества N_F и N_O. Каждое требование $i \in N_F$ обслуживается вначале прибором A, затем прибором B, причем $a_i > 0$ и $b_i > 0$. Для требований множества N_O порядок прохождения приборов заранее не задан и может быть различным для разных требований. Будем считать, что $N_F = \{1, 2, \ldots, n_1\}$, $|N_O| = n_0$.

Процесс обслуживания каждого требования каждым прибором протекает без прерываний. Не допускается одновременного обслуживания двух или более требований одним прибором, а также одновременного обслуживания каждого требования обоими приборами.

Пусть v_A и v_B — фиксированные скорости приборов A и B соответственно и в описанную систему в момент времени $d = 0$ поступает множество требований $R \subseteq N$. Общим временем обслуживания при некотором расписании $s = s(v_A, v_B; R)$ назовем момент завершения обслуживания всех требований множества R при этом расписании. Наименьшее значение общего времени обслуживания в классе всех расписаний для указанных скоростей приборов обозначим через $\bar{t}(v_A, v_B; R)$, а расписание, которому соответствует это значение,— $s^*(v_A, v_B; R)$.

Рассмотрим задачу P нахождения таких скоростей приборов v_A и v_B, при которых функционал

$$f(v_A, v_B) = c_0 \bar{t}(v_A, v_B; N)^{q_1} + c_1 v_A^{q_2} + c_2 v_B^{q_3} \qquad (1)$$

принимает наименьшее значение. Здесь c_0, c_1 и c_2 — положительные действительные константы, а q_1 и q_2 — положительные целые константы.

Аналогичная задача в случае $N_F=\varnothing$ рассматривалась в [1], где предложен алгоритм минимизации функционала (1) и построения соответствующего расписания, имеющий трудоемкость $O(n\log_2 n)$ арифметических и логических операций, в том числе операций извлечения корня и возведения в целую степень. Если $N_F\neq\varnothing$, то, как показано в [2], задача P может быть решена за $O(n+n_1^2\log_2 n_1+n_0\log_2 n_0)$ операций.

Ниже предлагается более эффективный алгоритм решения задачи P, имеющий трудоемкость не более $O(n+n_1^2+n_0\log_2 n_0)$ операций.

Положим $a(R)=\sum\limits_{i\in R}a_i$, $b(R)=\sum\limits_{i\in R}b_i$, $R\subseteq N$, $R\neq\varnothing$ и $a(\varnothing)=b(\varnothing)=0$. Как и в [2], решение задачи P сведем к решению двух задач $\overline{P}$ и $\overline{\overline{P}}$. Задача $\overline{P}$ заключается в минимизации (1) при условии $w_A a(N_F)\geqslant w_B b(N_O)$, а задача $\overline{\overline{P}}$ — в минимизации (1) при условии $w_A a(N_F)< w_B b(N_O)$. В [2] показано, что задача $\overline{\overline{P}}$ может быть решена за $O(n+n_0\log_2 n_0)$ операций и далее эта задача не рассматривается.

Рассмотрим задачу $\overline{P}$. Как отмечено в [2] (см. также [3]), условие $w_A a(N_F)\geqslant w_B b(N_O)$ означает, что $\overline{t}(v_A,\ v_B;\ N)=\max\ \{\overline{t}(v_A,\ v_B;\ N_F),\ w_A a(N),\ w_B b(N)\}$, где v_A и v_B — фиксированные скорости приборов. Положим $\gamma=v_B/v_A=w_A/w_B$.

Пусть $\pi^*(\gamma,N_F)$ — последовательность требований множества N_F, построенная по алгоритму из [4] и определяющая расписание $s^*(v_A,\ v_B;\ N_F)$, $\gamma=v_B/v_A$. Если $\pi^*(\gamma,N_F)=(i_1,i_2,\ldots,i_{n_1})$, то

$$\overline{t}(v_A,\ v_B;\ N_F)=\max\{w_A\sum_{k=1}^{u}a_{i_k}+w_B\sum_{k=u}^{n_1}b_{i_k}\,|\,u=\overline{1,\ n_1}\}=w_B\overline{t}(\gamma),$$

где $\overline{t}(\gamma)=\max\{\gamma\sum\limits_{k=1}^{u}a_{i_k}+\sum\limits_{k=u}^{n_1}b_{i_k}\,|\,u=\overline{1,\ n_1}\}$.

Установим некоторые свойства функции $\overline{t}(\gamma)$.

Свойство 1. Пусть $\pi^*(\gamma,\ N_F)=(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_{n_1})$ для всех $\gamma\in[\gamma',\ \tilde{\gamma}[$ и $\pi^*(\gamma,\ N_F)=(j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_{n_1})$ для всех $\gamma\in[\tilde{\gamma},\ \gamma''[$, причем $\tilde{\gamma}=b_{i_l}/a_{i_l}$, $1\leqslant l\leqslant n_1$. Тогда, если

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\overline{t}(\tilde{\gamma}-\varepsilon)=\max\{\tilde{\gamma}\sum_{k=1}^{u}a_{i_k}+\sum_{k=u}^{n_1}b_{i_k}\,|\,u=\overline{1,\ n_1}\}=\tilde{\gamma}\sum_{k=1}^{u'}a_{i_k}+\sum_{k=u'}^{n_1}b_{i_k}$$

и

$$\overline{t}(\tilde{\gamma})=\max\{\tilde{\gamma}\sum_{k=1}^{u}a_{j_k}+\sum_{k=u}^{n_1}b_{j_k}\,|\,u=\overline{1,\ n_1}\}=\tilde{\gamma}\sum_{k=1}^{u''}a_{j_k}+\sum_{k=u''}^{n_1}b_{j_k},$$

то $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\overline{t}(\tilde{\gamma}-\varepsilon)=\overline{t}(\tilde{\gamma})$ и либо $u''=u'$, либо $u''=u'-1$.

Доказательство. Равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\overline{t}(\tilde{\gamma}-\varepsilon)=\overline{t}(\tilde{\gamma})$ доказано в [2].

Если $u'=l$, то из неравенства $\tilde{\gamma}\sum\limits_{k=1}^{l}a_{i_k}+\sum\limits_{k=l}^{n_1}b_{i_k}>\tilde{\gamma}\sum\limits_{k=1}^{l+1}a_{i_k}+\sum\limits_{k=l+1}^{n_1}b_{i_k}$ следует, что $b_{i_l}>\tilde{\gamma}a_{i_{l+1}}$. Поскольку $\tilde{\gamma}a_{i_l}=b_{i_l}$, то $a_{i_l}>a_{i_{l+1}}$. Тогда из [4] следует, что $b_{i_{l+1}}\leqslant\tilde{\gamma}a_{i_{l+1}}$, и поскольку $b_{i_l}>\tilde{\gamma}a_{i_{l+1}}$, то можно заключить, что $(i_1, i_2, \dots, i_{n_1}) = (j_1, j_2, \dots, j_{n_1})$. Тем самым свойство 1 выполняется, причем $u'' = u'$.

Пусть $u' \neq l$. Предположим, что $(i_1, i_2, \dots, i_{n_1}) \neq (j_1, j_2, \dots, j_{n_1})$ (в противном случае свойство 1 выполняется, причем $u'' = u'$). Из [4] следует, что $(j_1, j_2, \dots, j_{n_1}) = (i_1, i_2, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_{r-1}, i_l, i_r, \dots, i_{n_1})$, $l < r-1$.

Если $l < u' \leqslant r-1$, то при $u'' = u'-1$, учитывая равенство $\tilde{\gamma} a_{i_l} = b_{i_l}$, имеем:

$$\tilde{\gamma} \sum_{k=1}^{u'-1} a_{j_k} + \sum_{k=u'-1}^{n_1} b_{j_k} = \tilde{\gamma}\left(\sum_{k=1}^{l-1} a_{i_k} + \sum_{k=l+1}^{u'} a_{i_k}\right) + \sum_{k=u'}^{r-1} b_{i_k} + b_{i_l} + \sum_{k=r}^{n_1} b_{i_k} =$$

$$= \tilde{\gamma}\left(\sum_{k=1}^{l-1} a_{i_k} + a_{i_l} + \sum_{k=l+1}^{u'} a_{i_k}\right) + \sum_{k=u'}^{n_1} b_{i_k} = \tilde{\gamma} \sum_{k=1}^{u'} a_{i_k} + \sum_{k=u'}^{n_1} b_{i_k}.$$

Рассуждая аналогичным образом, нетрудно убедиться, что при $l < r - 1 < u'$ и $u' < l < r-1$ свойство 1 также выполняется, причем $u'' = u'$.

Можно показать, что имеет место следующее

Свойство 2. Пусть γ' и γ'' такие значения γ, что $\gamma' < \gamma''$ и $\pi^*(\gamma', N_F) = \pi^*(\gamma'', N_F) = (i_1, i_2, \dots, i_{n_1})$. Если $\bar{t}(\gamma') = \gamma' \sum_{k=1}^{u'} a_{i_k} + \sum_{k=u'}^{n_1} b_{i_k}$, $\bar{t}(\gamma'') = \gamma'' \sum_{k=1}^{u''} a_{i_k} + \sum_{k=u''}^{n_1} b_{i_k}$, то $u' \leqslant u''$.

Опишем процесс решения задачи $\bar{P}$. Положим $\gamma_0 = b(N_O)/a(N_F)$. Построим перестановку $\pi^*(\gamma_0, N_F) = (i_1, i_2, \dots, i_{n_1})$ и вычислим такое значение u_0', что $\bar{t}(\gamma_0) = \gamma_0 \sum_{k=1}^{u_0'} a_{i_k} + \sum_{k=u_0'}^{n_1} b_{i_k}$.

Для каждого требования $i \in N_F$, $\gamma_0 a_i < b_i$, вычислим $\gamma_i = b_i/a_i$. Пусть среди γ_i имеется p различных значений. Пронумеруем их таким образом, что $\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_p$. Положим $\gamma_{p+1} = W$, где $W > \gamma_p$ — достаточно большое число.

Для каждого z, $z = \overline{1, p+1}$, выполним следующие действия. Пусть $\pi^*(\gamma_{z-1}, N_F) = (i_1, i_2, \dots, i_{n_1})$. Учитывая свойства 1 и 2, вычислим такое значение u_z'', что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \bar{t}(\gamma_z - \varepsilon) = \max\left\{\gamma_z \sum_{k=1}^{u} a_{i_k} + \sum_{k=u}^{n_1} b_{i_k} \,\middle|\, u = \overline{u_z' - 1, n_1}\right\} = \gamma_z \sum_{k=1}^{u_z''} a_{i_k} + \sum_{k=u_z''}^{n_1} b_{i_k}.$$

Если $z \neq p+1$, то, зная перестановку $\pi^*(\gamma_{z-1}, N_F)$, за $O(n_1)$ операций сформируем перестановку $\pi^*(\gamma_z, N_F) = (j_1, j_2, \dots, j_{n_1})$. Воспользовавшись свойством 1, вычислим такое значение u_z' что

$$\bar{t}(\gamma_z) = \gamma_z \sum_{k=1}^{u_z'} a_{j_k} + \sum_{k=u_z'}^{n_1} b_{j_k}.$$

Таким образом, не более чем за $O(n_1^2)$ операций будут найдены значения $u_0', u_1'', u_1', u_2'', \dots, u_p', u_{p+1}''$.

Учитывая свойство 2, для каждого интервала $[\gamma_{z-1}, \gamma_z]$, $z = \overline{1, p+1}$, и перестановки $\pi^*(\gamma_{z-1}, N_F) = (i_1, i_2, \dots, i_{n_1})$ вычислим значения:

$$\alpha_0^z = 0,\ \beta_0^z = b(N);\ \alpha_j^z = \sum_{k=1}^{e_j^z} a_{i_k},\quad \beta_j^z = \sum_{k=e_j^z}^{n_1} b_{i_k},\quad j = \overline{1, g_z};\quad \alpha_{g_z+1}^z = a(N),$$

$\beta^z_{g_z+1} = 0$, где $g_z = u''_z - u'_{z-1} + 1$, $e^z_j = u'_{z-1} + j - 1$. Очевидно, $\bar{t}(v_A, v_B; N) = w_B \max\{\gamma\alpha^z_j + \beta^z_j \mid j = \overline{0, g_z + 1}\}$ при фиксированной скорости v_B и $\gamma \in [\gamma_{z-1}, \gamma_z]$. Воспользовавшись модификацией алгоритма из [5], описанной в [1, 2], за $O(g_z \log_2 g_z)$ операций отыщем такие точки $\gamma^0_{z-1}, \gamma^1_{z-1}, \ldots, \gamma^{h_z}_{z-1}$, что $\gamma_{z-1} = \gamma^0_{z-1} < \gamma^1_{z-1} < \ldots < \gamma^{h_z}_{z-1} = \gamma_z$ и для всех $\gamma \in [\gamma^{x-1}_{z-1}, \gamma^x_{z-1}]$, $1 \leqslant x \leqslant h_z$, существует такое значение $j = j(x)$, что $\bar{t}(v_A, v_B; N) = w_B \times (\gamma\alpha^z_j + \beta^z_j)$.

Из свойств 1 и 2 и неравенств $g_z \leqslant n_1$, $z = \overline{1, p+1}$, следует, что

$$H = \sum_{z=1}^{p+1} h_z \leqslant \sum_{z=1}^{p+1} (g_z + 2) = O(n_1), \quad \sum_{z=1}^{p+1} O(g_z \log_2 g_z) = O(n_1 \log_2 n_1).$$

Таким образом, решение задачи $\bar{P}$ сводится к решению H подзадач минимизации функционала $c_0 w_B^{q_1} (\gamma\alpha^z_j + \beta^z_j)^{q_1} + w_B^{-q_2} (c_1 \gamma^{-q_2} + c_2)$ при $\gamma \in [\gamma^{x-1}_{z-1}, \gamma^x_{z-1}]$, $j = j(x)$, $x = \overline{1, h_z}$, $z = \overline{1, p+1}$. Как отмечено в [1, 2], для решения задачи $\bar{P}$ достаточно решить $O(\sum_{z=1}^{p+1} \log_2 h_z)$ таких подзадач, следуя схеме метода дихотомии.

Окончательно, трудоемкость описанного алгоритма решения задачи $\bar{P}$ не превосходит $O(n + n_1^2)$ операций, а задачи $P - O(n + n_1^2 + n_0 \log_2 n_0)$ операций, т. е. составляет не более $O(n^2)$ операций.

Список литературы

1. Ishii H., Nishida T. // Journ. Oper. Res. Soc. Japan. 1986. V. 29. N 2. P. 123.
2. Ishii H., Masuda T., Nishida T. // Discr. Appl. Math. 1987. V. 17. N 1—2. P. 29.
3. Masuda T., Ishii H., Nishida T. Ibid. 1985. V. 11. N 2. P. 175.
4. Johnson S. M. // Nav. Res. Log. Quart. 1954. V. 1. N 1. P. 61.
5. Megiddo M. // Math. Oper. Res. 1979. V. 4. N 3. P. 414.

Поступила в редакцию 11.03.88.

УДК 519.1

В. М. КОТОВ, Г. ФУИТИ

ЗАДАЧА О РЮКЗАКЕ С МОНОТОННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Одной из модельных задач дискретной оптимизации является задача о рюкзаке, которая в наиболее общей постановке имеет вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) \to \max; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leqslant b, \ a_i, \ b > 0; \tag{1)—(2}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant h_i, \ x_i \text{ — целые}, \ a_i h_i \leqslant b, \tag{3}$$

где $f_i(0) = 0$, $f_i(x_i)$ — неубывающие функции. К задаче (1)—(3) сводятся задачи планирования и проектирования. Многими авторами исследовалась эффективность субоптимальных алгоритмов решения различных частных случаев задачи (1)—(3): линейной $f_i(x_i) = c_i x_i$ [1], с фиксированными доплатами $f_i(x_i) = c'_i x_i + c''_i \operatorname{sign} x$ [2], выпуклой ($f_i(x_i)$ — дискретно-выпуклые) функции [3, 4]. В настоящей заметке идеи оценок алгоритмов для задач с выпуклыми функциями переносятся на задачу о рюкзаке с произвольными монотонными функциями. Доказывается, что гарантированная точность предлагаемого алгоритма равна 1/4. Определим для каждого $i = 1, \ldots, h$ величины