

ВАРИАНТ ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА ПАРЦИАЛЬНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН

Существуют различные способы использования разложений полей по плоским волнам для решения краевых задач акустики и электродинамики. Эффективными являются алгоритмы, в которых сочетаются геометрико-оптические и волновые представления и тем самым учитывается геометрия решаемой задачи.

В результате переотражений исходного луча по законам геометрической оптики на гранях многоугольных и многогранных областей с двугранными углами $m\pi/n$ (m, n — целые числа) образуются конгруэнции лучей с конечным числом их направлений распространения. К примеру, в прямоугольнике и равностороннем треугольнике имеются соответственно четыре и шесть таких направлений. Построенные таким образом лучевые картины имеют самостоятельное значение при исследовании волноводов и резонаторов методами геометрической оптики. В методе парциальных плоских волн (ППВ) они носят вспомогательный характер. В нем каждому направлению сопоставляется плоская волна, а области — решение волнового уравнения в виде суперпозиции конечного числа ППВ. Неизвестные амплитудные и фазовые параметры волн из этих суперпозиций доопределяются граничными условиями на поверхности области на втором этапе решения задачи. Оказывается, что этих параметров достаточно для того, чтобы удовлетворить идеальным, а в некоторых случаях импедансным условиям на гранях калейдоскопических (зеркально-симметричных) областей [1, 2]. Полученные таким путем модовые решения существенно дополняют ряд известных точных аналитических решений краевых задач, найденных ранее с помощью метода разделения переменных. Роль этих решений не ограничивается расчетами и исследованиями с их помощью электродинамических характеристик калейдоскопических волноводов и резонаторов [3]. Как все точные решения, они являются опорными при апробации и разработке численных и приближенных аналитических методов решения краевых задач. С их применением значительно расширяются возможности существующих методов, например метода частичных областей, в исследованиях сложных волноводно-резонаторных устройств [4, 5]. Однако возможности метода ППВ в построении точных модовых решений в аналитической форме ограничены и к настоящему времени практически исчерпаны. Дальнейшее развитие метода связывают с его численными вариантами [6] и приближенными расчетами [7]. В данной работе предлагается новый численно-аналитический вариант обобщения метода ППВ. Конкретизация и апробация его проведены на примерах расчета низших E -мод волноводов с поперечными сечениями в виде правильных многоугольников.

Расчет полей E -мод регулярных идеальных волноводов, а также колебаний мембран сводится, как известно, к решению двумерного волнового уравнения в плоскости поперечного сечения волновода x, y при однородных граничных условиях на контуре L многоугольника

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + h^2 T = 0, \quad T/L = 0. \quad (1)$$

Ось волновода совпадает с осью z декартовой системы координат, ось x ортогональна одной из сторон многоугольника. Критическая частота f пропорциональна собственному значению задачи h ($f = ch/2\pi$), а продольная компонента поля связана с собственными функциями соотношением $E_z = h^2 T(x, y) \exp(i\omega t - i\gamma z)$, в котором γ, h — соответственно продольная и поперечная компоненты волнового вектора k ($k^2 = \gamma^2 + h^2$), $\omega = ck$ — круговая частота. Поперечные составляющие поля получаются дифференцированием продольной составляющей по известным формулам [8].

В методе ППВ каждому многоугольнику с $m\pi/n$ углами сопоставляется суперпозиция конечного числа плоских волн

$$u(x, y) = \frac{m\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{iHy \sin \beta_j} (A_j e^{iHx \cos \beta_j} + B_j e^{-iHx \cos \beta_j}), \quad \beta_j = \alpha + 2\pi j/n, \quad (2)$$

попарно взаимосвязанных на его сторонах геометрическим отражением и удовлетворяющих уравнению (1). Здесь A_j, B_j — амплитуды волн; β_j — углы между осью x и направлениями распространения парциальных волн.

При замене направлений распространения парциальных волн в (2) на противоположные получается при нечетных n и $\alpha \neq 0, \alpha \neq \pi/2n$ второе, линейно независимое от первого, решение. В случае $\alpha = 0, \alpha = \pi/2n$ и нечетных n , а также любых значениях α при четных n такая замена не приводит к новым направлениям распространения волн, а следовательно, и к новым решениям волнового уравнения (1). При определенных значениях фазовых и амплитудных параметров сумма (2) является точным решением задачи (1) с контуром L в виде прямоугольника, правильного, полуправильного и равнокатетного треугольников [1, 8]. Число волн в суперпозиции при этом соответственно равно четырем, шести, двенадцати и восьми. Однако для других областей с $m\pi/n$ углами, в их числе и для правильных многоугольных с $n \geq 5, m=2$, конечное число плоских волн не может дать точного решения граничной задачи. В этих случаях сумма (2) может быть использована аналогично [7] для приближенных расчетов. Здесь же она рассматривается как исходная функция при построении базисного ряда для решения граничной задачи (1). Другие члены ряда получаются дифференцированием ее по угловому параметру, и ряд записывается в виде:

$$T = \sum_{p=0}^{\infty} A_p u_p, \quad u_p = \frac{\partial^p u(x, y, \alpha)}{\partial \alpha^p}. \quad (3)$$

При решении задачи (1) часть постоянных интегрирования ряда (3) находится из соображений симметрии. Граничная задача (1) осесимметрична. Потребуем, чтобы ее решение также было осесимметрично. В системе координат с началом в центре многоугольника это означает, что с преобразованием поворота на угол $2\pi/n$ решение должно переходить само в себя с точностью до постоянных множителей

$$\sigma_g = \exp(2i\pi g/n), \quad g = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4)$$

имеющих смысл собственных значений оператора преобразования поворота [9]. Из этого условия находим соотношения взаимосвязи между амплитудами волн в исходном решении:

$$A_j = A_g e^{ig\beta_j}, \quad B_j = B_g e^{-ig\beta_j}. \quad (5)$$

В результате число независимых амплитудных коэффициентов уменьшается в n раз и решение (2) принимает вид:

$$u_g(x, y) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{iHy \sin \beta_j} (A_g e^{iHx \cos \beta_j + ig\beta_j} + B_g e^{-iHx \cos \beta_j - ig\beta_j}). \quad (6)$$

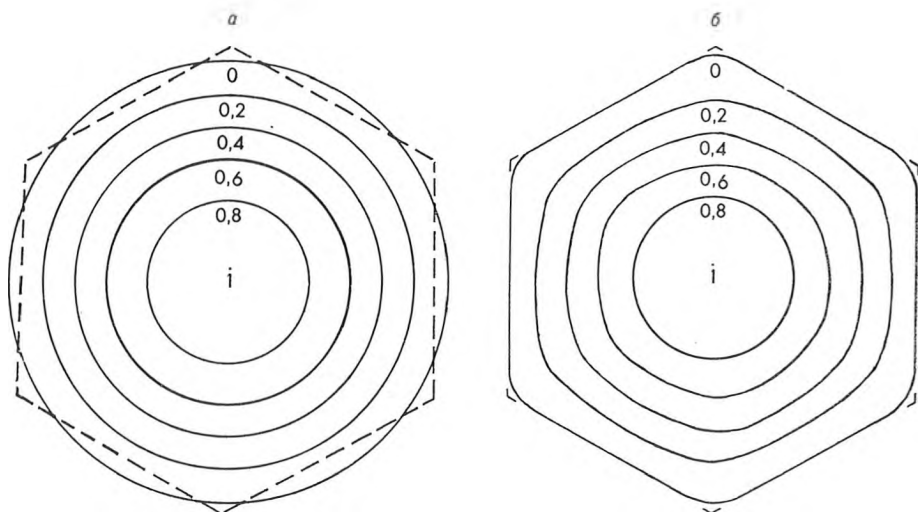
При дифференцировании его по угловому параметру свойства симметрии сохраняются, поэтому требования симметрии выполняются для каждого члена ряда (3), а значит, и для собственного решения задачи на любом отрезке ряда. Индекс g при этом разделяет все собственные решения задачи (1) на группы по свойствам их осевой симметрии и кратности вырождения критических частот. При $g \neq 0$ и $g \neq n/2$ (n — четное) собственные значения σ_g оператора преобразования поворота комплексны, а критические частоты вырождены. Каждой частоте соответствуют два линейно независимых, комплексно сопряженных решения. При $g = 0$ и $g = n/2$ функции вещественны, а критические частоты невырождены. Низшие E -моды относятся к группе решений с предельными для данной за-

дачи свойствами симметрии, для которых $g=0$ и поле максимально в центре многоугольника. При других значениях g все функции имеют узел в центре многоугольника и не могут быть использованы для описания низших колебаний.

Приближенные решения для низших мод E -типа шести- и восьмиугольных волноводов искались на начальном отрезке ряда путем минимизации функционала:

$$\Phi(A_p, \alpha_p, ha) = \frac{1}{u(0, 0)} \int \left| \sum A_p \frac{\partial^p [\cos(ha \cos \beta_j) \cos(hy \sin \beta_j)]}{\partial \alpha_p^p} \right| dy, \quad (7)$$

имеющего смысл интегральной невязки граничных условий. Интегрирование ведется с учетом симметрии задачи только по одной стороне многоугольника $x=a, |y| \leq a \operatorname{tg}(\pi/n)$.



Решения оценивались величиной отклонения их узловых линий от контура многоугольника. На рисунке для сравнения показаны изолинии приближенных решений, полученных с учетом одной (а) и двух (б) базисных функций, и штриховой линией обозначен контур многоугольника. При минимизации функционала (7) на одном, первом, члене ряда (3) находим $A_0=1, \alpha_0=0, ha=2,322$ в шестиугольном и $A_0=1, \alpha_0=0, ha=2,360$ в восьмиугольном волноводе. Как видно из рисунка, величина отклонения в таком приближении значительна. Метода ППВ в обычном своем виде ($p=0$) при этом может быть недостаточно. По геометрической форме узловая линия ближе к окружности, чем к многоугольнику. Максимальная величина отклонения узловой линии от окружности меньше $5 \cdot 10^{-3} a$. Различие между найденным при этом собственным значением и собственным значением, полученным с помощью функций Бесселя, составляет величину еще меньшего порядка — $10^{-4} ha$. Существует, таким образом, возможность описания с высокой точностью собственных полей и критических частот круглого волновода суперпозицией сравнительно небольшого числа плоских волн.

С учетом второго члена ряда (3) получаем: $A_0=1; A_1=-1,48; \alpha_0=-\alpha_1=0,23; ha=2,316$ для шестиугольника и $A_0=1; A_1=-1,9, \alpha_0=-\alpha_1=0,2, ha=2,352$ для восьмиугольника. Оба слагаемых (u_0 и u_1) в найденном приближенном решении имеют одинакового порядка, но разного знака весовые множители A_0 и A_1 . Однако для того чтобы оценить роль второго слагаемого u_1 в формировании решения, необходимо еще принять во внимание зависимость его от координат x, y . В результате дифференцирования по угловому параметру тригонометрические функции доумножаются на x^p, y^p . Поэтому вблизи начала координат второй

член ряда, как и члены более высокого порядка p , вносит лишь небольшую добавку к решению, найденному с учетом только суперпозиции плоских волн ($p=0$). Картина изолиний у центра многоугольника при этом практически не изменяется с переходом от первого (см. рисунок, *a*) ко второму (см. рисунок, *b*) и более высоким приближениям. С ростом x , y вклад второго слагаемого в общее решение возрастает. Это приводит к существенной трансформации узловой линии и практическому совпадению ее с контуром многоугольника (см. рисунок, *b*). Небольшое расхождение их наблюдается в направлениях к угловым областям. Как видно из рисунка, в этих же направлениях поле изменяется медленнее, чем в других направлениях, поэтому небольшие деформации узловых линий в угловых областях не должны приводить к существенному изменению найденных собственных значений. Для шести- и восьмиугольных волноводов они равны $ha=2,316$ и $ha=2,352$ соответственно и совпадают со значениями, полученными для них другими методами [6, 10]. Таким образом, в предложенном методе приемлемая точность расчета волноводов и резонаторов сложного сечения достигается с учетом нескольких базисных функций и существует возможность для уточнения результатов за счет использования в расчетах производных все более высокого порядка.

Автор выражает признательность А. П. Хапалюку за ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. Рудницкий А. С., Хапалюк А. П. // Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 8. С. 1609.
2. Рудницкий А. С. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I: Физ. Мат. Мех. 1982. № 1. С. 29.
3. Рудницкий А. С., Титов А. Д., Хапалюк А. П. // Журн. техн.-физ. 1984. Т. 54. Вып. 10. С. 2056.
4. Заргано Г. Ф., Ляпин В. П., Михалевский В. С., Синельников Ю. М., Синявский Г. П., Чекрыгина И. М. Волноводы сложных сечений. М., 1986.
5. Медокс А. Г. // Радиотехника. 1967. Т. 22. № 9. С. 30.
6. Рудницкий А. С., Хапалюк А. П. // Радиотехника и электроника. 1984. Т. 29. № 6. С. 1199.
7. Взятыхшев В. Ф., Якухин С. Д., Калинин В. И. // Тр. МЭИ. 1978. Вып. 360. С. 5.
8. Кацеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. М., 1966.
9. Силли Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М., 1966.
10. Лаура. ТИИЭР. 1967. Т. 55. № 4. С. 410.

Поступила в редакцию 29.12.87.

УДК 621.315.592

Л. А. КАЗАКЕВИЧ, П. Ф. ЛУГАКОВ, И. М. ФИЛИППОВ

РЕКОМБИНАЦИЯ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В БЕЗДИСЛОКАЦИОННОМ КРЕМНИИ С РАЗЛИЧНЫМИ ТИПАМИ РОСТОВЫХ МИКРОДЕФЕКТОВ

Получаемые в настоящее время бездислокационные монокристаллы кремния содержат обычно различные виды (*A, B, C, D*) микродефектов [1], наличие которых ухудшает эксплуатационные характеристики изготовленных на основе такого материала полупроводниковых приборов [1, 2]. Последнее обусловлено электрической и рекомбинационной активностью микродефектов, сведения о которой крайне ограничены [2, 3]. Данная работа посвящена изучению процессов рекомбинации неравновесных носителей заряда (НЗ) в кремнии с различными типами микродефектов.

Исследования выполнялись на бездислокационных кристаллах *n*-типа с удельным сопротивлением $\rho=50$ Ом·см, выращенных бестигельной зонной плавкой в вакууме с переменной скоростью от 1 до 6 мм/мин. Из различных частей слитка были вырезаны три группы кристаллов: пер-