Список литературы

1. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
2. Хусаинов Д. Я., Комаров Ю. А., Юнькова Е. А. // Автоматика. 1984. № 6. С. 73.
3. Кастрица О. А. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 3. С. 77.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., 1969.
5. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., 1970.

Поступила в редакцию 23.04.87.

УДК 517.977.58

А. В. ЛУБОЧКИН

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ПО МИНИМУМУ ЭНЕРГИИ УПРАВЛЕНИЯ

В классе скалярных кусочно-непрерывных управлений $u(t)$, $t\in T=[0, t^*]$, рассмотрим задачу:

$$I(u)=\int_0^{t^*} c(t)(u(t)-\alpha(t))^2/2dt\to\min,\quad \dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t),\quad x(0)=x_0,$$

$$Gx(t^*)=g,\ |u(t)|\leqslant 1,\ t\in T, \tag{1}$$

где $x(t)\in R^n$; $g\in R^m$; A, G — постоянные матрицы соответствующих размеров; $\operatorname{rank} G=m$; $c=c(t)>0$, $\alpha=\alpha(t)$, $t\in T$,— непрерывные, кусочно-дифференцируемые функции.

Управление $u=(u(t),\ t\in T)$, $u(t)=[u(t+0)+u(t-0)]/2$, назовем допустимым, если $|u(t)|\leqslant 1$, $t\in T$, и на соответствующей непрерывной траектории $x=(x(t),\ t\in T)$ прямой системы ($\dot{x}=Ax+bu$, $x(0)=x_0$) выполняется терминальное ограничение $Gx(t^*)=g$. Задача (1) состоит в построении среди допустимых оптимального управления u^0: $I(u^0)=\min I(u)$. Различные точки $t_i\in T$, $i=\overline{1, m}$, назовем опорными моментами, совокупность $T_{оп}=\{t_i, i=\overline{1, m}\}$ — опорой (ограничений), если не вырождена опорная матрица $P=(p(t_i),\ i=\overline{1, m})$, где $p(t)=Gq(t)$, $t\in T$; $q(t)$, $t\in T$,— решение уравнения $\dot{q}=-Aq$, $q(t^*)=b$. Пару $\{u, T_{оп}\}$ из допустимого управления u и опоры $T_{оп}$ назовем опорным управлением. Считаем его невырожденным, если $|u(t_i)|<1$, $i=\overline{1, m}$.

Пусть $\{u, T_{оп}\}$ — начальное опорное управление. Поставим ему в соответствие траекторию $\psi=(\psi(t),\ t\in T)$ сопряженной системы:

$$\dot{\psi}=A'\psi,\ \psi(t^*)=G'y,\ y'=(c(t_i)(u(t_i)-\alpha(t_i))\ i=\overline{1, m})'P^{-1}. \tag{2}$$

Положим $\Delta(t)=\psi'(t)b-c(t)(u(t)-\alpha(t))$, $t\in T$.

Критерий оптимальности. Для оптимальности управления u достаточно существования такой опоры $T_{оп}$, что для $\{u, T_{оп}\}$ выполняются соотношения:

$$\Delta(t)\leqslant 0 \text{ при } u(t)=-1;\ \Delta(t)\geqslant 0 \text{ при } u(t)=1;\ \Delta(t)=0 \text{ при } |u(t)|<1,\ t\in T. \tag{3}$$

Пусть $\{u, T_{оп}\}$ — невырожденное опорное управление. Для оптимальности управления u необходимо, чтобы для $\{u, T_{оп}\}$ выполнялись соотношения (3).

Следствие. Пусть $\{u^0, T_{оп}\}$ — невырожденное опорное управление. Оптимальное управление u^0 является непрерывным.

Исходя из опоры $T_{оп}$ и опорного управления $\{u, T_{оп}\}$ методом первого порядка [1] решим конечное число специальным образом [2] сформированных задач вида: $\sum_{j=1}^{k} c_j(x_j-\alpha_j)^2/2\to\min$, $Ax=b$, $d_*\leqslant x\leqslant d^*$, где $x=(x_j,\ j=\overline{1, k})$, $c=(c_j>0,\ j=\overline{1, k})$, $\alpha=(\alpha_j,\ j=\overline{1, k})$, d_*, $d^*\in R^k$; $b\in R^m$.

Подсчитаем оценки, позволяющие судить о целесообразности перехода к доводке. Процедура доводки завершает работу алгоритма построением непрерывного оптимального управления. Процедура доводки состоит в следующем. Построим квазиуправление $\omega=(\omega(t),\ t\in T)$:

$$\omega(t)=-1 \text{ при } \psi'(t)b+c(t)\alpha(t)<-c(t);\ \omega(t)=1$$
$$\text{при } \psi'(t)b+c(t)\alpha(t)>c(t);\ \omega(t)=\alpha(t)+\psi'(t)b/c(t)$$
$$\text{при } |\psi'(t)b+c(t)\alpha(t)|\leqslant c(t),\ t\in T; \tag{4}$$

квазитраекторию $\varkappa=(\varkappa(t),\ t\in T)$: $\dot{\varkappa}=A\varkappa+b\omega$, $\varkappa(0)=x_0$; решение $\bar{\omega}_{\text{оп}}=(\bar{\omega}_i=\bar{\omega}(t_i),\ i=\overline{1,m})$ уравнения:

$$F(\bar{\omega}_{\text{оп}})=\sum_{j=1}^{p}\Big(\int_{\underline{t}_j}^{\underline{\tau}_j(\bar{\omega}_{\text{оп}})}p(t)(\omega(\underline{t}_j)-\alpha(t))\,dt-\int_{\bar{t}_j}^{\bar{\tau}_j(\bar{\omega}_{\text{оп}})}p(t)(\omega(\bar{t}_j)-$$
$$-\alpha(t))\,dt+\int_{\underline{\tau}_j(\bar{\omega}_{\text{оп}})}^{\bar{\tau}_j(\bar{\omega}_{\text{оп}})}p(t)\,\psi'(t;\bar{\omega}_{\text{оп}})\,b/c(t)\,dt-\int_{\underline{t}_j}^{\bar{t}_j}p(t)\,\psi'(t)\,b/c(t)\,dt\Big)=$$
$$=g-G\varkappa(t^*), \tag{5}$$

где $\psi(t;\bar{\omega}_{\text{оп}})$, $t\in T$,— решение системы (2) при $y'=(c(t_i)(\bar{\omega}_i-\alpha(t_i)),\ i=\overline{1,m})'P^{-1}$; $\bar{\omega}=(\bar{\omega}(t),\ t\in T)$ — квазиуправление (4), построенное по $\psi(t;\bar{\omega}_{\text{оп}})$, $t\in T$; $\underline{t}_j$, $\bar{t}_j$, $j=\overline{1,p}$,— левые и правые концы особых отрезков квазиуправления ω $(|\psi'(t)b+c(t)\alpha(t)|\leqslant c(t),\ t\in[\underline{t}_j,\ \bar{t}_j],\ j=\overline{1,p})$; $\underline{\tau}_j(\bar{\omega}_{\text{оп}})$, $\bar{\tau}_j(\bar{\omega}_{\text{оп}})$, $j=\overline{1,p}$,— левые и правые концы особых отрезков квазиуправления $\bar{\omega}$; p — число особых отрезков. Уравнение (5) решим методом Ньютона.

Алгоритм является конечным: существует число $N<+\infty$, что для любого $\nu>0$ для построения управления u, $\|g-Gx(t^*)\|\leqslant\nu$, $|I(u)-I(u^0)|\leqslant\leqslant\nu$, требуется не более N интегрирований прямой и сопряженной систем.

Список литературы

1. Лубочкин А. В. Метод первого порядка решения выпуклой квадратичной сепарабельной задачи / Редкол. журн. «Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук». Минск. 1986. Деп. в ВИНИТИ 15.10.86. № 7258-В86. 10 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2: Задачи управления. Минск, 1984.

Поступила в редакцию 18.04.87.

УДК 519.1

А. Н. ИСАЧЕНКО, МУХИБУЛЛА АБДУЛЛА

МНОГОГРАННИК ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО БУЛЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Некоторые проблемы технико-экономического содержания сводятся к следующей задаче квадратичного булевого программирования:

$$(x,\ Ax^T)+(b,\ x^T)+d\to\text{extr},\ x\in\{-1,1\}^n. \tag{1}$$

Здесь A — $(n\times n)$-матрица; b — n-вектор; d — скаляр. Запишем для задачи (1) эквивалентную задачу линейного программирования. Для этого введем в рассмотрение новые переменные $y_{ij}=x_ix_j$, $i,\ j=\overline{1,n}$. Тогда задача (1) примет вид:

$$(D,\ Y)+c\to\text{extr}, \tag{2}$$

$$Y\in\{-1,\ 1\}^{n\times n},\ y_{ij}=y_{ii}\cdot y_{jj},\ i,\ j=\overline{1,n},\ i\neq j, \tag{3}$$

где D — $(n\times n)$-матрица с элементами $d_{ij}=a_{ij}$; $i,\ j=\overline{1,n},\ i\neq j$; $d_{ii}=$