

$$J = -\frac{1}{2} \frac{[2m^4 + (E_x/G_{xy} - \nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}, \quad (9)$$

$$K = \frac{1}{2} \frac{m^2(m^2 - \nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}.$$

Если вращение сплошной ортотропной эллиптической пластинки происходит вокруг большой оси симметрии, расположенной в срединной плоскости, то распределение напряжений в ней опять же описывается формулами (8), но постоянные имеют другие значения:

$$I^* = \frac{(E_x/E_y - m^2\nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]},$$

$$J^* = \frac{1}{2} \frac{(E_x/E_y - m^2\nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}, \quad (10)$$

$$K^* = -\frac{1}{2} \frac{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - \nu_{xy})m^2 + 2E_x/E_y]}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}.$$

Из анализа выражений (8) следует, что наибольшее напряжение на границе пластинки получается на концах малой оси, а напряжение, наибольшее для всей пластинки, имеет место в центре.

При равенстве полуосей эллипса $a=b=R$ формулы (8) описывают распределение напряжений в ортотропном диске радиуса R , вращающемся вокруг диаметра.

Полагая $E_x=E_y=E$, $\nu_{xy}=\nu_{yx}=\nu$, $G_{xy}=G$ в выражениях (8), (9), (10), получаем распределение напряжений в сплошной изотропной эллиптической пластинке, вращающейся вокруг осей симметрии, расположенных в срединной плоскости. Отметим, что в литературе имеется приближенное решение (методом малого параметра) этой задачи [3].

Список литературы

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., 1957.
2. Лехницкий С. Г. // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. № 9. С. 527.
3. Уздалев А. И., Старостин В. Е., Кравцов В. Ф. // Изв. вузов СССР: Машиностр. 1983. № 1. С. 33.

Поступила в редакцию 13.12.86.

УДК 517.948.32:517.544

О. ДЖУРАЕВ

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО n -ЛИСТНОМУ НАКРЫТИЮ СФЕРЫ

Пусть R — замкнутая риманова поверхность, реализованная в виде n -листной поверхности наложения сферы $\widehat{C}$. Предположим, что заданы точки ветвления $a_1, a_2=0, a_3$ ($a_1, a_3 \neq \infty, 0$) и образующие группы монодромии поверхности $\sigma_1=(2, 1, \dots, 1)$, $\sigma_2=(n)$, $\sigma_3=(n_1)(n_2)$, где $n_1+n_2=n$ и $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3=e$.

Требуется построить поле алгебраических функций $\widehat{C}(z, w)$, соответствующее заданному накрытию сферы [1].

Данные подстановки содержат цикл n -го порядка, поэтому порожденная ими группа действует транзитивно [2]. Следовательно, риманова поверхность R связна [3]. Поскольку цикленные типы подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответственно таковы: $(2, 1, \dots, 1)$, (n) , (n_1, n_2) , то индекс ветвления поверхности R равен $\omega_z=2n-2$, а ее род равен $\rho=\frac{1}{2}\omega_z-n+1=0$ [3]. Следовательно, R гомеоморфна сфере $\widehat{C}$.

Пусть $f(z, w)=0$ — алгебраическое уравнение римановой поверхности R . Тогда соответствующая векторно-матричная задача линейного сопряжения для рассматриваемого случая имеет вид [3] (при надлежащей нумерации корней):

$$\omega^+(t) = (G_1, 1)\omega^-(t), \quad t \in L_1, \quad (1)$$

$$\omega^+(t) = (G_3, 1)\omega^-(t), \quad t \in L_2,$$

где $\omega(z) = (\omega_1(z), \omega_2(z), \dots, \omega_n(z))$ — вектор-функция (столбец); $\omega_i(z)$ — корни уравнения $f(z, \omega) = 0$; $i = 1, 2, \dots, n$, $(G_1, 1)$ и $(G_3, 1)$ — матричное представление подстановок σ_1 и σ_3 ; L_1 и L_2 — разрезы, соединяющие точки a_1, a_2 и a_2, a_3 соответственно.

Элемент $\omega(z)$, порождающий искомое поле, будем искать как аналитическое решение задачи (1), обращающееся в нуль при $z=0$, ограниченное при $z=a_1$ и $z=a_3$ и имеющее асимптотику $\omega_1(z) \sim O(kz)$, $\omega_2(z) \sim O(1), \dots, \omega_n(z) \sim O(1)$ при $z \rightarrow \infty, k \neq 0$. Искомое решение должно удовлетворять следующему алгебраическому уравнению:

$$f(z, \omega) = \omega^n + (\alpha z + \beta)\omega^{n-1} + (\gamma z + \delta)\omega^{n-2} + \dots + (\xi z + \eta)\omega + (\mu z + \nu) = 0, \quad (2)$$

где $\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu$ — неизвестные коэффициенты. Так как $z=0$ является точкой ветвления порядка n , то, полагая $\omega(0)=0$, заключаем, что при $z=0$ уравнение (2) должно приводиться к виду $\omega^n=0$. Отсюда следует, что $\beta=\delta=\dots=\eta=\nu=0$, и, следовательно, получим:

$$f(z, \omega) = \omega^n + \alpha z \omega^{n-1} + \gamma z \omega^{n-2} + \dots + \xi z \omega + \mu z = 0. \quad (3)$$

Учитывая асимптотику $\omega_1(z) \sim O(kz)$ при $z \rightarrow \infty$ и используя диаграмму Ньютона [3], заключаем, что $\alpha = -k$ и, следовательно,

$$f(z, \omega) = \omega^n - k z \omega^{n-1} + \gamma z \omega^{n-2} + \dots + \xi z \omega + \mu z = 0. \quad (4)$$

Для получения остальных неизвестных коэффициентов исходим из того условия, что поверхность R над точками $z=a_1$ и $z=a_3$ разветвляется по закону подстановок σ_1 и σ_3 соответственно; при $z=a_1$ имеем:

$$\begin{aligned} f(a_1, \omega) &= \omega^n - k a_1 \omega^{n-1} + \gamma a_1 \omega^{n-2} + \dots + \xi a_1 \omega + \mu a_1 = (\omega + a)^2 (\omega^{n-2} + \\ &+ b_1 \omega^{n-3} + \dots + b_{n-2}) = \omega^n + (2a + b_1) \omega^{n-1} + (b_2 + 2ab_1 + a^2) \omega^{n-2} + \dots \\ &\dots + (2ab_{n-2} + a^2 b_{n-3}) \omega + a^2 b_{n-2}, \text{ а при } z=a_3: f(a_3, \omega) = \omega^n - k a_3 \omega^{n-1} + \\ &+ \gamma a_3 \omega^{n-2} + \dots + \xi a_3 \omega + \mu a_3 = (\omega + c)^{n_1} (\omega + d)^{n_2} = \omega^n + (n_1 c + n_2 d) \omega^{n-1} + \\ &+ \left[\frac{n_1(n_1-1)}{2} c^2 + n_1 n_2 c d + \frac{n_2(n_2-1)}{2} d^2 \right] \omega^{n-2} + \dots + c^{n_1} d^{n_2}. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ω , получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + b_1 = -k a_1 \\ b_2 + 2ab_1 + a^2 = \gamma a_1 \\ \dots \\ 2ab_{n-2} + a^2 b_{n-3} = \xi a_1 \\ a^2 b_{n-2} = \mu a_1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} n_1 c + n_2 d = -k a_3 \\ \frac{n_1(n_1-1)}{2} c^2 + n_1 n_2 c d + \frac{n_2(n_2-1)}{2} d^2 = \gamma a_3 \\ \dots \\ (n_1 d + n_2 c) c^{n_1-1} d^{n_2-1} = \xi a_3 \\ c^{n_1} d^{n_2} = \mu a_3 \end{array} \right. \quad (5)$$

Система (5) содержит $2n$ уравнений и такое же число неизвестных. Система совместна по построению. Далее, неизвестные $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$ в первую часть системы (5) входят линейно. Исключая их, получаем:

$$\begin{cases} n a^{n-1} + (n-1) k a_1 \cdot a^{n-2} + (n-2) \gamma a_1 \cdot a^{n-3} + \dots \pm \xi a_1 = 0, \\ (n-1) a^n + (n-2) k a_1 a^{n-1} + (n-3) \gamma a_1 \cdot a^{n-2} + \dots \pm \mu a_1 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Знак «+» берется, если n четно, а знак «-», если n нечетно. Исключая неизвестную c из второй части системы (5), будем иметь:

$$\begin{cases} a_3 \gamma = \left[\frac{n_2(n_2-1)}{2} d^2 + \frac{n_1-1}{2n_1} (k a_3 + n_2 d)^2 - n_2 d (k a_3 + n_2 d) \right] \\ \dots \\ a_3 \xi = \left[\frac{(n_1^2 - n_2^2) d - k n_2 a_3}{n_1} \right] \left(\frac{-k a_3 - n_2 d}{n_1} \right)^{n_1-1} d^{n_2-1} \\ a_3 \mu = \left(\frac{-k a_3 - n_2 d}{n_1} \right)^{n_1} d^{n_2} \end{cases} \quad (7)$$

Находя $\gamma, \dots, \xi, \mu$ из (7) и подставляя их значения в (6), получаем:

$$\begin{cases} na_3 a^{n-1} + \{(n-1)ka_1 a_3\} \cdot a^{n-2} + \dots \pm \\ \pm \left\{ \left[\frac{(n_1^2 - n_2^2)d - ka_3 n_2}{n_1} \right] \left(\frac{-ka_3 - n_2 d}{n_1} \right)^{n_1-1} a_1 d^{n_2-1} \right\} = 0, \\ (n-1)a_3 a^n + \{(n-2)ka_1 a_3\} a^{n-1} + \dots \pm \left[\frac{-ka_3 - n_2 d}{n_1} \right]^{n_1} d^{n_2} a_1 = 0. \end{cases}$$

Левые части этих уравнений будем рассматривать как многочлены от a . Обозначим их соответственно через $\varphi(a)$ и $\psi(a)$. Желая исключить переменную a , приравняем к нулю результат этих многочленов:

$$R(\varphi, \psi) = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) является уравнением степени $n(n-1)$ относительно a . Следовательно, оно имеет $n(n-1)$ решений, но среди этих решений имеются и посторонние. Их число равно $n(n-1) - n(n-3)/2 = n(n+1)/2$ (поскольку число соотношений $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = e$ для рассматриваемого случая равно $n(n-3)/2$). Отбрасывая посторонние решения, получаем нужные значения для коэффициентов искомого уравнения (2). При этом уравнение поверхности принимает вид:

$$f(z, w) = w^n - kz w^{n-1} + \left\{ \frac{1}{a_3} \left[\frac{n_2(n_2-1)}{2} d^2 + \frac{n_1-1}{2n_1} (ka_3 + n_2 d)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - n_2 (ka_3 + n_2 d) d \right] \right\} z w^{n-2} + \dots + \frac{1}{a_3} \left(\frac{-ka_3 - n_2 d}{n_1} \right)^{n_1} d^{n_2} = 0. \quad (9)$$

Здесь d определяется из (8). В частности, из (9) видно, что при $d=0$ уравнение поверхности R приводимо, т. е. $d=0$ является посторонним решением.

Пусть $\gamma_0, \dots, \xi_0, \mu_0$ — одно из найденных значений для коэффициентов уравнения (4) и пусть

$$f(z, w) = w^n - kz w^{n-1} + \gamma_0 z w^{n-2} + \dots + \xi_0 z w + \mu_0 z = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим вопрос об упорядочении корней уравнения (10). Для этой цели находим z из равенства (10):

$$z = \frac{w^n}{kw^{n-1} - \gamma_0 w^{n-2} - \dots - \xi_0 w - \mu_0}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что $z \rightarrow \infty$ при $w \rightarrow \infty$ и $kw^{n-1} - \gamma_0 w^{n-2} - \dots - \xi_0 w - \mu_0 \rightarrow 0$.

Обозначим корни уравнения $kw^{n-1} - \gamma_0 w^{n-2} - \dots - \xi_0 w - \mu_0 = 0$ через $w_1^0, w_2^0, \dots, w_{n-1}^0$. Таким образом, над точкой $z = \infty$ переменная w принимает ровно n значений $w_1^0, w_2^0, \dots, w_{n-1}^0, \infty$. Функция, обратная к (11),

реализует конформное отображение поверхности R на $\widehat{\mathbb{C}}$. При этом контур, лежащий на R над $L_1 \cup L_2$, преобразуется на сложный контур Γ и разбивает $\widehat{\mathbb{C}}$ на n связных компонент (образы листов), содержащих по одной из точек $w_1^0, w_2^0, \dots, w_{n-1}^0, \infty$ (образы точки ∞). Далее при

$z = a_1$ и $z = a_3$ находим кратные корни уравнения (10). Эти корни расположены на границах примыкающих областей. Затем перенумеруем области таким образом, чтобы они располагались по закону подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и содержали по одной из точек $w_1^0, w_2^0, \dots, w_{n-1}^0, \infty$ [4].

В качестве решений векторно-матричной задачи (1) нужно взять однозначные в области $\widehat{\mathbb{C}}|L_1 \cup L_2$ решения уравнения (10), удовлетворяющие следующим начальным условиям: $w_{i_1}(\infty) = w_1^0, w_{i_2}(\infty) = w_2^0, \dots, w_{i_n}(\infty) = \infty$, где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — соответствующая перестановка чисел

$1, 2, \dots, n$. Нормальный базис поля алгебраических функций, заданный уравнением (10), имеет вид [3]:

$$1, w, \frac{w^2}{z - a_3}, \frac{w^3}{(z - a_3)^2}, \dots, \frac{w^{n-2}}{(z - a_3)^{n-3}}, \frac{w^{n-1}}{(z - a_3)^{n-3}}.$$

Аналогично работе [4] можно построить каноническую матрицу решения задачи (1) и, следовательно, в явном виде решить соответствующую неоднородную векторно-матричную задачу [5].

Список литературы

1. Зверович Э. И. // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29. № 2. С. 104.
2. Чеботарев Н. Г. Теория Галуа. М.; Л., 1936. С. 154.
3. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. С. 396.
4. Джураев О. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1987. № 1. С. 43.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968. С. 551.

Поступила в редакцию 20.03.87.

УДК 517.51

ЧЖОУ СУНПИН

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАССОНА

1. Введение. Пусть $C_{[-1, 1]}^k$ — класс функций, имеющих непрерывную производную степени k на $[-1, 1]$, $C_{[-1, 1]}^0 = C_{[-1, 1]}^0$, $C_{2\pi}^k$ — класс 2π -периодических функций, имеющих непрерывную производную степени k с нормой $\|f\|_{C[a, b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Обозначим через $E_n(f)$ наилучшее приближение функции $f(x) \in C_{[-1, 1]}$ алгебраическими полиномами степени не выше n , через $E_n^*(f)$ наилучшее приближение функции $f(x) \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами степени не выше n . Пусть $\omega_k(f, \delta)$ — модуль гладкости порядка k функции $f(x)$, т. е. $\omega_k(f, \delta) = \sup_{0 < h \leq \delta} \|\Delta_h^k f(x)\|_C$, где $\Delta_h^k f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f(x))$, $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$. Всюду в дальнейшем через C_x , M_x будем обозначать постоянные, зависящие лишь от x .

Задача наилучшего приближения непрерывных функций привлекала внимание многих ученых. Еще в 1914 г. С. Бернштейн [1] показал, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} n E_n(|x|)$. Затем С. Бернштейн [2, 3] и С. М. Никольский [4, 6] перенесли этот результат на случай функций, имеющих производные и удовлетворяющих условию Липшица. В 1980 г. М. Хассон [7] доказал следующую теорему.

Теорема А. Пусть $f(x) \in C_{(-1, 1)}$, $\omega_2(f, \delta) = O(\delta)$ и существует такая постоянная $a \in (-1, 1)$, что выполнено одно из условий: $D_+ f(a) > D_- f(a)$, $D_- f(a) > D_+ f(a)$. Тогда $n E_n(f) \sim 1^*$, здесь D_+ , D_+ , D_- , D_- — производные Дини, см. [8].

В этой же статье М. Хассон привел без доказательства соответствующую теорему для функций, имеющих производные.

Теорема Б. Пусть $k \geq 1$, $f(x) \in C_{[-1, 1]}^k$, $\omega_2(f^{(k)}, \delta) = O(\delta)$ и существует такая постоянная $a \in (-1, 1)$, что выполнено одно из условий

$$D_+ f_*^{(k)}(a) > D_- f^{(k)}(a), \quad D_- f^{(k)}(a) > D_+ f^{(k)}(a). \quad (1) - (2)$$

Тогда $n^{k+1} E_n(f) \sim 1$.

Настоящая статья посвящена обобщению результатов Хассона, в частности, мы даем другое, более простое, доказательство теорем А и Б.

2. Основные результаты. Говорят, что функция $\varphi(x) \in \Phi$, если выполнены следующие условия:

$$I \quad \varphi(x) > 0, \quad x \in (0, \infty), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = 0,$$

$$II \quad \varphi(\varepsilon x) \geq \varepsilon \varphi(x) \quad \text{для } x \in (0, 1] \text{ и } \varepsilon \in (0, 1],$$

* Существует положительная постоянная K , не зависящая от n , такая, что $K^{-1} \leq n E_n(f) \leq K$.