

Согласно конструкции алгоритма α , множество X_α^0 не содержит пары (x_1, x_2) с одинаковыми значениями $F(x_1) = F(x_2)$, поэтому обоснование алгоритма α состоит в доказательстве того, что X_α^0 представляет собой искомое ПМА.

Утверждение. Построенное с помощью алгоритма α множество X_α^0 удовлетворяет условию

$$F(X_\alpha^0) = F(\tilde{X}). \quad (5)$$

Доказательство. Согласно конструкции алгоритма α , имеем $\tilde{X}_\alpha \subseteq \tilde{X}$. Отсюда следует справедливость включения

$$F(\tilde{X}_\alpha) \subseteq F(\tilde{X}). \quad (6)$$

Включение

$$F(\tilde{X}) \subseteq F(\tilde{X}_\alpha) \quad (7)$$

докажем методом от противного. Пусть существует парето-оптимальное покрытие $\bar{x}^* \in \tilde{X}_\alpha$ такое, что

$$F(x^*) \in F(\tilde{X}_\alpha), \quad F(\bar{x}^*) \notin F(\tilde{X}). \quad (8)$$

Заметим теперь, что при построении множества \tilde{X}_α алгоритм α_2 осуществляет перебор покрытий по всем возможным значениям пары $(F_1(x), F_2(x))$. Таким образом, алгоритм α_2 осуществляет поиск покрытия \bar{x}^* , оптимального по критерию $F_3(x)$ при фиксированном значении $F_1(x), F_2(x)$. Тогда соотношения (8) означают, что имеют место $(F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x})) = (F_1(\bar{x}^*), F_2(\bar{x}^*))$, $F_3(\bar{x}) < F_3(\bar{x}^*)$. Но это противоречит оптимальности покрытия x по критерию $F_3(x)$. Полученное противоречие доказывает справедливость (6). Из (4), (6) и (7) следует справедливость (5). Утверждение доказано.

Список литературы

1. Петренко А. И. Основы автоматизированного проектирования. Киев, 1982.
2. Селютин В. А. Машинное конструирование электронных устройств. М., 1977.
3. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
5. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.
6. Перепелица В. А. // Кибернетика. 1984. № 4. С. 62.
7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
8. Müller Hartmut // Wiss Z. Techn. Hochsch. Carl Schorlemmer. Leuna-Merseburg, 1977. № 1. S. 81.
9. Емеличев В. А., Комлик В. И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М., 1981.
10. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М., 1982.

Поступила в редакцию 13.04.87.

УДК 539.3

В. В. КОРОЛЕВИЧ, И. А. ПРУСОВ

НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКЕ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ ОСИ СИММЕТРИИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим тонкую сплошную ортотропную эллиптическую пластинку, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг малой оси симметрии, расположенной в срединной плоскости (см. рисунок). Внешний край пластинки будем полагать свободным от усилий.

Отнесем срединную плоскость пластинки к прямоугольной системе координат xOy , оси которой совпадают с главными направлениями упругости.

Нормальные σ_x , σ_y и касательные τ_{xy} напряжения, возникающие в эллиптической пластинке при ее вращении, выражаются через функцию напряжений $F(x, y)$ известными соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + U, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + U, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (1)$$

где $U(x) = -\frac{\rho\omega^2}{2}x^2$ — потенциал центробежных сил; ρ — плотность материала.

Функция напряжений $F(x, y)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных [1]:

$$\frac{1}{E_y} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \left(\frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{E_x} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \frac{(1 - \nu_{yx})}{E_y} \rho\omega^2. \quad (2)$$

Общее решение уравнения (2) представим в виде:

$$F(x, y) = \frac{(1 - \nu_{yx})}{24} \rho\omega^2 x^4 + 2\text{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое — частное решение уравнения (2), а выражение $F_0(x, y) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)]$ — общее решение однородного уравнения, соответствующего данному. Функции $F_j(z_j)$ ($j = 1, 2$) — произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$. Комплексные параметры μ_j , характеризующие анизотропию тела, для всех известных ортотропных материалов являются чисто мнимыми, $\mu_j = i\delta_j$.

Из (1) с учетом выражения (3) получим следующие формулы для определения напряжений:

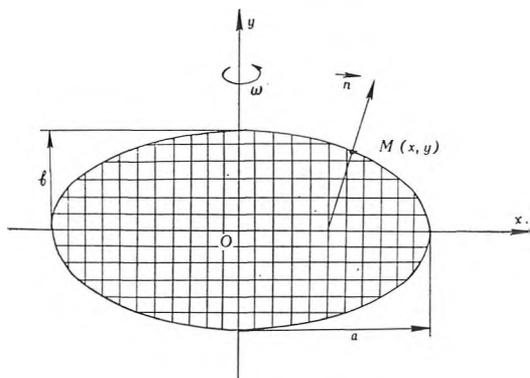
$$\begin{cases} \sigma_x = 2\text{Re} [\mu_1^2 \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \Phi_2'(z_2)] - \frac{\rho\omega^2}{2} x^2, \\ \sigma_y = 2\text{Re} [\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)] - \nu_{yx} \frac{\rho\omega^2}{2} x^2, \\ \tau_{xy} = -2\text{Re} [\mu_1 \Phi_1'(z_1) + \mu_2 \Phi_2'(z_2)], \end{cases} \quad (4)$$

где $\Phi_j(z_j) = \frac{dF_j(z_j)}{dz_j}$.

Таким образом, задача об определении напряженного состояния ортотропной эллиптической пластинки, вращающейся вокруг малой оси симметрии, расположенной в срединной плоскости, свелась к отысканию двух аналитических функций $\Phi_j(z_j)$ из граничных условий на внешнем контуре:

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = 0, \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя в выражения (5) значения напряжений σ_x , σ_y , τ_{xy} из (4) и интегрируя по дуге s , представим граничные условия на свободном крае пластинки в следующем виде:



К расчету ортотропной эллиптической пластинки, вращающейся вокруг малой оси симметрии

$$\begin{cases} 2\operatorname{Re} [\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k e^{ik\vartheta} + \bar{\alpha}_k e^{-ik\vartheta}), \\ 2\operatorname{Re} [\mu_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 \Phi_2(z_2)] = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k e^{ik\vartheta} + \bar{\beta}_k e^{-ik\vartheta}), \end{cases} \quad (6)$$

где $\alpha_0 = -v_{yx} \frac{\rho\omega^2 a^3}{6}$, $\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 = v_{yx} \frac{\rho\omega^2 a^3}{16}$, $\alpha_2 = \bar{\alpha}_2 = 0$, $\alpha_3 = \bar{\alpha}_3 = v_{yx} \times \frac{\rho\omega^2 a^3}{48}$, $\alpha_k = \bar{\alpha}_k = 0$ ($k = 4, 5, 6 \dots$); $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -i \frac{3\rho\omega^2 a^2 b}{16}$, $\beta_2 = \bar{\beta}_2 = 0$, $\beta_3 = -i \frac{\rho\omega^2 a^2 b}{48}$, $\bar{\beta}_1 = i \frac{3\rho\omega^2 a^2 b}{16}$, $\bar{\beta}_3 = i \frac{\rho\omega^2 a^2 b}{48}$, $\beta_k = \bar{\beta}_k = 0$ ($k = 4, 5, 6 \dots$); a, b, ϑ — полуоси и параметр эллипса соответственно.

В работе [2] показано, что для эллиптической односвязной области функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ представляются следующими рядами:

$$\Phi_1(z_1) = A_0 + A_1 z_1 + \sum_{k=2}^{\infty} A_k P_{1k}(z_1), \quad \Phi_2(z_2) = B_0 + B_1 z_2 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k P_{2k}(z_2),$$

где $P_{jk}(z_j)$ — полиномы Фабера, имеющие вид: $P_{jk}(z_j) = -\frac{1}{(a - i\mu_j b)^k} \times \left[(z_j + \sqrt{z_j^2 - a^2 - \mu_j^2 b^2})^k + (z_j - \sqrt{z_j^2 - a^2 - \mu_j^2 b^2})^k \right]$. Подстановка функций $\Phi_j(z_j)$ в граничные условия (6) приводит к системе алгебраических уравнений для определения постоянных A_k, B_k и сопряженных с ними \bar{A}_k, \bar{B}_k ($k = 2, 3, 4 \dots$). Решая ее, найдем:

$$A_k = \bar{A}_k = B_k = \bar{B}_k = 0, \quad (k = 2, 4, 5, 6 \dots).$$

$$A_3 = \bar{A}_3 = -\frac{\rho\omega^2 a^2 b}{96} \cdot \frac{(m + \delta_1)^3 [v_{yx} \delta_2^2 (3m^2 + \delta_2^2) + (m^2 + 3\delta_2^2)]}{(\delta_2^2 - \delta_1^2) [3m^4 + (\delta_1^2 + \delta_2^2) m^2 + 3\delta_1^2 \cdot \delta_2^2]},$$

$$B_3 = \bar{B}_3 = \frac{\rho\omega^2 a^2 b}{96} \cdot \frac{(m + \delta_2)^3 [v_{yx} \delta_1^2 (3m^2 + \delta_1^2) + (m^2 + 3\delta_1^2)]}{(\delta_2^2 - \delta_1^2) [3m^4 + (\delta_1^2 + \delta_2^2) m^2 + 3\delta_1^2 \cdot \delta_2^2]},$$

$$m = a/b.$$

Линейные члены функций $A_1 z_1$ и $B_1 z_2$ определяют постоянные напряжения в пластинке: $\sigma_x^0 = \frac{\bar{\beta}_1 - \beta_1}{ib} = \frac{3}{8} \rho\omega^2 a^2$, $\sigma_y^0 = \frac{\bar{\alpha}_1 + \alpha_1}{a} = v_{yx} \frac{\rho\omega^2 a^2}{8}$, $\tau_{xy}^0 = \frac{\bar{\alpha}_1 - \alpha_1}{ib} = 0$. Постоянные A_0, B_0 остаются произвольными, не влияющими на напряженное состояние пластинки.

Таким образом, для рассматриваемой задачи функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= A_0 + \left[A_1 + \frac{6(m^2 - \delta_1^2)}{b(m + \delta_1)^3} A_3 \right] z_1 - \frac{8A_3}{b^3(m + \delta_1)^3} z_1^3, \\ \Phi_2(z_2) &= B_0 + \left[B_1 + \frac{6(m^2 - \delta_2^2)}{b(m + \delta_2)^3} B_3 \right] z_2 - \frac{8B_3}{b^3(m + \delta_2)^3} z_2^3, \end{aligned} \quad (7)$$

а компоненты напряжений, вычисленные по формулам (4), равны:

$$\begin{cases} \sigma_x = \rho\omega^2 a^2 \left[J \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + I \frac{y^2}{b^2} \right], \\ \sigma_y = \rho\omega^2 b^2 \left[K \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + I \frac{x^2}{a^2} \right], \\ \tau_{xy} = -I \rho\omega^2 xy, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$I = \frac{m^2(m^2 - v_{xy})}{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - 2v_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]},$$

$$J = -\frac{1}{2} \frac{[2m^4 + (E_x/G_{xy} - \nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}, \quad (9)$$

$$K = \frac{1}{2} \frac{m^2(m^2 - \nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}.$$

Если вращение сплошной ортотропной эллиптической пластинки происходит вокруг большой оси симметрии, расположенной в срединной плоскости, то распределение напряжений в ней опять же описывается формулами (8), но постоянные имеют другие значения:

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{(E_x/E_y - m^2\nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}, \\ J^* &= \frac{1}{2} \frac{(E_x/E_y - m^2\nu_{xy})}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}, \\ K^* &= -\frac{1}{2} \frac{[3m^4 + (E_x/G_{xy} - \nu_{xy})m^2 + 2E_x/E_y]}{[3m^4 + (E_x/E_y - 2\nu_{xy})m^2 + 3E_x/E_y]}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из анализа выражений (8) следует, что наибольшее напряжение на границе пластинки получается на концах малой оси, а напряжение, наибольшее для всей пластинки, имеет место в центре.

При равенстве полуосей эллипса $a=b=R$ формулы (8) описывают распределение напряжений в ортотропном диске радиуса R , вращающемся вокруг диаметра.

Полагая $E_x=E_y=E$, $\nu_{xy}=\nu_{yx}=\nu$, $G_{xy}=G$ в выражениях (8), (9), (10), получаем распределение напряжений в сплошной изотропной эллиптической пластинке, вращающейся вокруг осей симметрии, расположенных в срединной плоскости. Отметим, что в литературе имеется приближенное решение (методом малого параметра) этой задачи [3].

Список литературы

1. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М., 1957.
2. Лехницкий С. Г. // Докл. АН СССР. 1937. Т. 15. № 9. С. 527.
3. Уздалев А. И., Старостин В. Е., Кравцов В. Ф. // Изв. вузов СССР: Машиностр. 1983. № 1. С. 33.

Поступила в редакцию 13.12.86.

УДК 517.948.32:517.544

О. ДЖУРАЕВ

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО n -ЛИСТНОМУ НАКРЫТИЮ СФЕРЫ

Пусть R — замкнутая риманова поверхность, реализованная в виде n -листной поверхности наложения сферы \widehat{S} . Предположим, что заданы точки ветвления $a_1, a_2=0, a_3$ ($a_1, a_3 \neq \infty, 0$) и образующие группы монодромии поверхности $\sigma_1=(2, 1, \dots, 1)$, $\sigma_2=(n)$, $\sigma_3=(n_1)(n_2)$, где $n_1+n_2=n$ и $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3=e$.

Требуется построить поле алгебраических функций $\widehat{C}(z, w)$, соответствующее заданному накрытию сферы [1].

Данные подстановки содержат цикл n -го порядка, поэтому порожденная ими группа действует транзитивно [2]. Следовательно, риманова поверхность R связна [3]. Поскольку цикленные типы подстановок $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответственно таковы: $(2, 1, \dots, 1)$, (n) , (n_1, n_2) , то индекс ветвления поверхности R равен $\omega_z=2n-2$, а ее род равен $\rho=\frac{1}{2}\omega_z-n+1=0$ [3]. Следовательно, R гомеоморфна сфере \widehat{S} .

Пусть $f(z, w)=0$ — алгебраическое уравнение римановой поверхности R . Тогда соответствующая векторно-матричная задача линейного сопряжения для рассматриваемого случая имеет вид [3] (при надлежащей нумерации корней):