

$$x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно показать, что $[x^1, x^2]$ является ребром многогранника $\text{conv}(M(k, n) \cap Z^n)$, но не является ребром многогранника $M(k, n)$. Теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Ковалев М. М., Исаченко А. И., Нгуен Нгиа // Докл. АН БССР. 1978. Т. 11. № 10. С. 17.
2. Kovalajw M., Nguen Ngia, Kühn E. // Tagung Math. Optimierung. Humboldt. Universität zu Berlin, 1977. S. 50.
3. Чинь Д. З., Нгуен Нгиа // Тоан хок. 1982. Т. 10. № 2. С. 1.
4. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. М., 1981.
5. Горюнович С. А. // Кибернетика. 1985. № 5. С. 67.

Поступила в редакцию 11.12.86.

УДК 519.25

Х. Д. ШУНГАРОВ

К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПОКРЫТИЯ ГРАФА ЗВЕЗДАМИ

1. В практике автоматизированного проектирования электронно-вычислительной аппаратуры [1, 2] возникает следующая многокритериальная задача дискретной оптимизации. Заданы: n -вершинный граф $G = (V, E)$, в котором каждое ребро $e = ij \in E$ взвешено целым числом $w(e) = w(i, j) \geq 0$, и множество натуральных чисел $H = \{h_1, \dots, h_T\}$. Каждому числу $h_t \in H$, $t = \overline{1, T}$, соответствует h_t -звезда (звезда типа t). Множество H будем называть множеством типовых звезд. Напомним, что h -звездой называется полный двудольный граф $K_{1, h-1}$ [3].

Покрытием графа G звездами будем называть его остовный подграф $x = (V, E_x)$, $E_x \subseteq E$, каждая компонента связности которого представляет собой звезду, изоморфную некоторой типовой звезде из множества типовых звезд H .

На множестве $X = \{x\}$ всех покрытий графа G задана векторная целевая функция (ВЦФ) $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$, частные критерии которой $F_k(x) \rightarrow \min$, $k = \overline{1, 3}$, имеют вид: $F_1(x) = |E| - |E_x|$ — число ребер графа G , не вошедших в покрытие x ; $F_2(x) = \sum_{t=1}^T c_t z_t$ — стоимость покрытия x , где c_t — стоимость звезды типа t ; $F_3(x) = \frac{1}{|E_x|} \sum_{e \in E_x} w(e)$ — удельный вес покрытия x .

ВЦФ $F(x)$ определяет паретовское множество $\bar{X} \subseteq X$ [4, 5]. Проблема

состоит в построении алгоритма, гарантирующего нахождение так называемого полного множества альтернатив (ПМА). ПМА X^0 определяется как такое минимальное по мощности подмножество $X^0 \subseteq \bar{X}$, что $F(X^0) = F(\bar{X})$, где для всякого $X^* \subseteq \bar{X}$ его образ в критериальном пространстве $F(X^*) = \{F(x)/x \in X^*\}$ [6].

Сформулированная задача покрытия графа звездами является NP -трудной проблемой, так как в качестве частного случая содержит задачу разбиения графа на пути длины два [7]. В настоящей работе предлагается алгоритм построения ПМА поставленной задачи.

2. Пусть $G = K_n = (V, E)$ — полный n -вершинный граф. Для существования покрытия графа G звездами при заданном $\mathbf{H} = \{h_t\}$, $t = \overline{1, T}$, необходимо, чтобы было разрешимо в целых неотрицательных числах уравнение

$$\sum_{t=1}^T h_t z_t = n, \quad (1)$$

где h_t — число вершин в звезде типа t ; z_t — число звезд типа t в покрытии x .

Пусть $z = (z_1, \dots, z_T)$ — некоторое конкретное решение уравнения (1), обладающее $T_0 < T$ ненулевыми компонентами. Компоненты этого решения представим в виде последовательности

$$z_{t_1}, \dots, z_{t_s}, \dots, z_{t_{T_0}}. \quad (2)$$

Сумма $\sum_{s=1}^{T_0} z_{t_s} = N$ содержательно означает количество звезд в покрытиях,

соответствующих последовательности (2). Множество всех покрытий такого вида обозначим через $X(z)$. Считая, что элементы последовательности (2) упорядочены по неубыванию, определим структуру всякого покрытия $x \in X(z)$ в виде последовательности

$$h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(v)}, \dots, h^{(N)}, \quad (3)$$

где $h^{(v)} = h_{t_1}$, $1 \leq v \leq z_{t_1}$,

$$h^{(v)} = h_{t_2}, \quad z_{t_1} + 1 \leq v \leq z_{t_1} + z_{t_2},$$

.....

$$h^{(v)} = h_{t_s}, \quad \sum_{r=1}^{s-1} z_{t_r} \leq v \leq \sum_{r=1}^s z_{t_r},$$

.....

$$h^{(v)} = h_{t_{T_0}}, \quad \sum_{s=1}^{T_0-1} z_{t_s} \leq v \leq \sum_{s=1}^{T_0} z_{t_s}.$$

При этом считаем, что звезды покрытия x перенумерованы числами $v = \overline{1, 2, \dots, N}$ во взаимно однозначном соответствии с элементами последовательности (3).

Введем теперь трехиндексные переменные x_{ij}^v , где

$$x_{ij}^v = \begin{cases} 1, & \text{если ребро } ij \text{ вошло в состав } v\text{-й звезды покрытия } x, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Переменные x_{ij}^v представим в виде трехиндексной матрицы $x = \|x_{ij}^v\|$, $i, j = \overline{1, n}$, $v = \overline{1, N}$, $X(z)$ — множество всех таких матриц x , где номера i, j строк-столбцов и номера ребер графа G находятся во взаимно однозначном соответствии.

Задача z : Найти $x \in X(z)$ такое, что $F_3(x) = \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega(i, j) x_{ij}^v \rightarrow \min$ при условиях

$$1^\circ. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^v x_{ij}^v = 2(h^{(v)} - 1), \quad v = \overline{1, N},$$

где c_{ij} — элементы матрицы смежности $C = \|c_{ij}\|$ исходного графа G .

$$2^\circ. \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}^v = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n c_{ij} x_{ij}^v = h^{(v)} - 1, \quad v = \overline{1, N}.$$

$$3^\circ. x_{ij}^v = x_{ji}^v \leq c_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad v = \overline{1, N}.$$

$$4^\circ. x_{ij}^v \in \{0, 1\}, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad v = \overline{1, N}.$$

$$5^\circ. \sum_{v=1}^N x_{ij}^v \leq 1, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

$$6^\circ. \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n x_{ij}^v \geq 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$7^\circ. \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{v=1}^N \sum_{i=1}^n x_{ij}^v \geq 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

Смысл условий 1° — 7° состоит в следующем. Условие 1° означает, что общее количество ребер, используемых для построения v -й звезды, равно в точности $h^{(v)} - 1$, $\forall v = \overline{1, N}$;

2° — для каждого $v = \overline{1, N}$ в графе G найдется вершина, которая является центром $h^{(v)}$ -звезды;

3° — условие учета того, что покрытие строится для неориентированного графа;

4° — условие задачи булева программирования.

5° — требование того, чтобы каждое ребро входило в состав не более чем одной звезды.

Условия 6° — 7° означают, что каждая вершина данного графа инцидентна хотя бы одному ребру, вошедшему в покрытие x .

3. Для построения ПМА X^0 сформулированной задачи предлагается алгоритм α , состоящий из двух уровней: нижнего и верхнего. На нижнем уровне работает алгоритм α_1 из двух этапов α_1^1 и α_1^2 . Этап α_1^1 для заданного N находит множество Z всех целых неотрицательных решений $z = (z_1, \dots, z_T)$ уравнения (1) и представляет собой алгоритм [8].

Этап α_1^2 состоит в том, что для каждого решения z , полученного на этапе α_1^1 , решается «задача z » методом построения последовательности планов [9]. Этап α_1^2 , а вместе с ним и алгоритм α_1 , заканчивает свою работу решением задачи z для каждого $z \in Z$.

Каждое решение $x = \|x_{ij}^v\|$, полученное с помощью [9], однозначно определяет некоторое покрытие, оптимальное по критерию $F_3(x)$. Множество всех таких покрытий обозначим через X_α .

На верхнем уровне работает алгоритм α_2 , который состоит из двух этапов α_2^1 и α_2^2 . Этап α_2^1 состоит в том, что покрытия из X_α попарно сравниваются между собой по значению ВЦФ $F(x)$ с целью отсева доминируемых [10], т. е. непарето-оптимальных. В результате такого отсева получим подмножество $\tilde{X}_\alpha = X_\alpha \cap \tilde{X}$ паретовского множества.

На этапе α_2^2 множество $\tilde{X}_\alpha$ разбивается на подмножества, каждое из которых составляет покрытие, одинаковые по значению ВЦФ $F(x)$. Затем, оставляя по одному представителю в каждом из этих подмножеств, получаем множество $X_\alpha^0 \subseteq \tilde{X}_\alpha$, удовлетворяющее условию

$$F(X_\alpha^0) = F(\tilde{X}_\alpha). \quad (4)$$

Согласно конструкции алгоритма α , множество X_α^0 не содержит пары (x_1, x_2) с одинаковыми значениями $F(x_1) = F(x_2)$, поэтому обоснование алгоритма α состоит в доказательстве того, что X_α^0 представляет собой искомое ПМА.

Утверждение. Построенное с помощью алгоритма α множество X_α^0 удовлетворяет условию

$$F(X_\alpha^0) = F(\tilde{X}). \quad (5)$$

Доказательство. Согласно конструкции алгоритма α , имеем $\tilde{X}_\alpha \subseteq \tilde{X}$. Отсюда следует справедливость включения

$$F(\tilde{X}_\alpha) \subseteq F(\tilde{X}). \quad (6)$$

Включение

$$F(\tilde{X}) \subseteq F(\tilde{X}_\alpha) \quad (7)$$

докажем методом от противного. Пусть существует парето-оптимальное покрытие $\bar{x}^* \in \tilde{X}_\alpha$ такое, что

$$F(x^*) \in F(\tilde{X}_\alpha), \quad F(\bar{x}^*) \notin F(\tilde{X}). \quad (8)$$

Заметим теперь, что при построении множества $\tilde{X}_\alpha$ алгоритм α_2 осуществляет перебор покрытий по всем возможным значениям пары $(F_1(x), F_2(x))$. Таким образом, алгоритм α_2 осуществляет поиск покрытия $\bar{x}^*$, оптимального по критерию $F_3(x)$ при фиксированном значении $F_1(x), F_2(x)$. Тогда соотношения (8) означают, что имеют место $(F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x})) = (F_1(\bar{x}^*), F_2(\bar{x}^*))$, $F_3(\bar{x}) < F_3(\bar{x}^*)$. Но это противоречит оптимальности покрытия x по критерию $F_3(x)$. Полученное противоречие доказывает справедливость (6). Из (4), (6) и (7) следует справедливость (5). Утверждение доказано.

Список литературы

1. Петренко А. И. Основы автоматизированного проектирования. Киев, 1982.
2. Селютин В. А. Машинное конструирование электронных устройств. М., 1977.
3. Харари Ф. Теория графов. М., 1973.
4. Подиновский В. В., Ногин В. Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М., 1982.
5. Дубов Ю. А., Травкин С. И., Якимец В. Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. М., 1986.
6. Перепелица В. А. // Кибернетика. 1984. № 4. С. 62.
7. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М., 1982.
8. Müller Hartmut // Wiss. Z. Techn. Hochsch. Carl Schorlemmer. Leuna-Merseburg, 1977. № 1. S. 81.
9. Емеличев В. А., Комлик В. И. Метод построения последовательности планов для решения задач дискретной оптимизации. М., 1981.
10. Михалевич В. С., Волкович В. Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем. М., 1982.

Поступила в редакцию 13.04.87.

УДК 539.3

В. В. КОРОЛЕВИЧ, И. А. ПРУСОВ

НАПРЯЖЕНИЯ В ОРТОТРОПНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКЕ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ ОСИ СИММЕТРИИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим тонкую сплошную ортотропную эллиптическую пластинку, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг малой оси симметрии, расположенной в срединной плоскости (см. рисунок). Внешний край пластинки будем полагать свободным от усилий.

Отнесем срединную плоскость пластинки к прямоугольной системе координат xOy , оси которой совпадают с главными направлениями упругости.