Применяя (8), получаем:

$$M_i \Delta X_{ii} = \sum_{s \in I_v} \Delta X_s \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k + B_i = \sum_{i \in I_v} \Delta X_s \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k.$$

$$\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii} + 2M_i \Delta X_{ii} \Big(1 - \sum_{p \in C_{it}} Y_p\Big).$$

В итоге получаем:

$$\Delta F = (\delta_i + 2\mu_i) \Delta X_{ii}. \tag{14}$$

Теперь можем сформулировать критерий локальной оптимальности.

Теорема 1. Для локальной оптимальности опорного плана $\{X, T\}$ достаточна, а в случае невырожденности и необходима, выполнимость соотношений:

$$\begin{aligned} &D_s \geqslant 0, \text{ если } X_s = d_{*s}, \\ &D_s \leqslant 0, \text{ если } X_s = d_s^*, \end{aligned} \tag{15}$$

$$D_s = 0, \text{ если } d_{*s} < X_s < d_s^*, \ s \in I_{vн}.$$

$$\begin{aligned} &\delta_i \geqslant 0, \text{ если } X_{ii} = d_{*ij}, \\ &\delta_i \leqslant 0, \text{ если } X_{ii} = d_{ij}^*, \\ &\delta_i = 0, \text{ если } d_{*ij} < X_{ii} < d_{ij}^*, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &(i, j) \in V, \ i \in I_{s0} \text{ или } i \in I_{m0} \text{ и } X_{ii} \neq 0. \\ &\delta_i \geqslant 0 \text{ и } \delta_i + 2\mu_i \geqslant 0, \text{ если } i \in I_{m0} \text{ и } X_{ii} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Определение 4. План $\{X, T\}$ называется согласованным, если на нем выполняются соотношения (16) и (17).

Введем β:

$$\beta = \sum_{D_s > 0} D_s (X_s - d_{*s}) + \sum_{D_s < 0} D_s (X_s - d_s^*), \tag{18}$$

где $s \in I_{vн}$.

Теперь можем сформулировать критерий субоптимальности.

Теорема 2. Для локальной субоптимальности невырожденного согласованного плана достаточна выполнимость неравенства $\beta \leqslant \varepsilon$.

На базе доказанных утверждений, следуя (1), можно построить прямой опорный метод решения задачи (3) (Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1986. Ч. 3: Сетевые задачи. С. 26).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Р. Ф. Габасову за внимание к работе.

Поступила в редакцию 03.12.86.

УДК 517.977

А. Л. ЛЕБЕДЕВ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Одним из центральных результатов теории оптимального управления является доказанный Р. Калманом принцип двойственности, который устанавливает тесную внутреннюю связь задач оптимального управления по квадратичному критерию и задач оптимальной фильтрации, а также позволяет облегчить решение многих практических задач управления. Впервые результаты Р. Калмана были перенесены на дифференциальные системы с запаздывающим аргументом А. Линдквистом [1]. Предлагаемая работа посвящена изучению дискретных систем, на примере которых доказана двойственность задач минимизации обобщенных квадратичных функционалов на траекториях линейных систем [2, 3] и и задач оптимальной фильтрации [4] при взаимно коррелированных помехах объекта и измерителя.

1. Запаздывание в фазовых переменных. Рассмотрим систему

$$x(t+\Theta) = A(t)\,x(t) + A_1(t)\,x(t-h_1) + G(t)\,w(t),\quad t\in T_N^\Theta, \tag{1}$$

$$x_0(\cdot) = \{\varphi_0(t),\ t\in S_{h_1}^\Theta(t_0),\ x(t_0)=x_0\},\quad y(t) = C(t)\,x(t)+v(t),\quad (2)-(3)$$

где $x(t)$, $t\in T_N^\Theta$, — n-вектор фазовых переменных; $y(t)$, $t\in T_N^\Theta$, — l-вектор наблюдений; $h_1>0$ — запаздывание; $T_N^\Theta = \{t_0,\ t_0+\Theta,\ \ldots,\ t_0+N\Theta = t_f-\Theta\}$; $S_{h_1}^\Theta(t_0) = \{t_0-h_1,\ t_0-h_1+\Theta,\ \ldots,\ t_0-\Theta\}$; $\Theta>0$ — шаг дискретности; случайный вектор x_0 и случайные процессы $\{w(t)\}$, $\{v(t)\}$, $t\in T_N^\Theta$, $\{\varphi_0(\tau)\}$, $\tau\in S_{h_1}^\Theta(t_0)$ имеют гауссовское распределение с нулевым средним и следующими статистическими свойствами:

$$M[x_0x_0^T] = Q_0,\quad M[\varphi_0(t)\,\varphi_0^T(\tau)] = Q_\varphi(t)\,\delta(t-\tau),\quad t,\ \tau\in S_{h_1}^\Theta(t_0),$$
$$M[w(t)\,w^T(\tau)] = Q_w(t)\,\delta(t-\tau),\quad M[v(t)\,v^T(\tau)] = Q_v(t)\,\delta(t-\tau),$$
$$M[w(t)\,v^T(\tau)] = Q_{wv}(t)\,\delta(t-\tau),\quad t,\ \tau\in T_N^\Theta. \tag{4}$$

Остальные взаимно корреляционные матрицы перечисленных случайных процессов равны нулю из-за их некоррелированности.

Задачу оптимальной фильтрации для системы (1) — (3) сформулируем следующим образом: требуется по наблюдениям $y(t)$, $t\in T_N^\Theta$, и заданному вектору $l\in R^n$ ($\|l\|\neq 0$) построить оценку величины $l^Tx(t_f)$ (проекции фазового вектора на заданное направление) вида

$$l^T\hat{x}(t_f) = -\sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} u^T(t)\,y(t), \tag{5}$$

где весовые коэффициенты $u(t)$, $t\in T_N^\Theta$, выбираются из условия

$$I_1 = M\{l^T[x(t_f)-\hat{x}(t_f)]\,[x(t_f)-\hat{x}(t_f)]^Tl\}\to\min. \tag{6}$$

Введем последовательность векторов:

$$z(t) = A^T(t)\,z(t+\Theta) + A_1^T(t+h_1)\,z(t+h_1+\Theta) + C^T(t)\,u(t),\ t\in T_N^\Theta, \tag{7}$$

$$z(\cdot) = \{0,\ \tau\in\{t_f+\Theta,\ \ldots,\ t_f+h_1\},\ z(t_f) = l\}. \tag{8}$$

С учетом (8) запишем

$$l^Tx(t_f) = z^T(t_f)\,x(t_f) = z^T(t_0)\,x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta}[z^T(t+\Theta)x(t+\Theta) - z^T(t)x(t)]. \tag{9}$$

Из (1) и (7) имеем соотношения: $z^T(t+\Theta)\,x(t+\Theta) = z^T(t+\Theta)\,A(t)\,x(t) + z^T(t+\Theta)\,A_1(t)\,x(t-h_1) + z^T(t+\Theta)\,G(t)\,w(t)$; $z^T(t)\,x(t) = z^T(t+\Theta)\times A(t)\,x(t) + z^T(t+h_1+\Theta)\,A_1(t+h_1)\,x(t) + u^T(t)\,C(t)\,x(t)$, подставляя которые в (9) приходим к

$$l^Tx(t_f) = z^T(t_0)\,x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_0+h_1-\Theta} z^T(t+\Theta)\,A_1(t)\,x(t-h_1) +$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta}[z^T(t+\Theta)\,G(t)\,w(t) + u^T(t)\,C(t)\,x(t)]. \tag{10}$$

В силу (3), (5) имеем

$$l^T\hat{x}(t_f) = -\sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta}[u^T(t)\,C(t)\,x(t) + u^T(t)\,v(t)]. \tag{11}$$

Объединяя (10) и (11), получаем

$$l^T [x(t_f) - \hat{x}(t_f)] = z^T(t_0)\, x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_0+h_1-\Theta} z^T(t+\Theta)\, A_1(t)\, x(t-h_1) +$$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [z^T(t+\Theta)\, G(t)\, w(t) + u^T(t)\, v(t)]. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (6) и учитывая (4), будем иметь: $I_1 = z^T(t_0)\, Q_0 z(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_0+h_1-\Theta} z^T(t+\Theta)\, A_1(t)\, Q_\varphi(t-h_1)\, A_1^T(t)\, z(t+\Theta) + \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [z^T(t+\Theta)\, G(t) \times Q_w(t)\, G^T(t)\, z(t+\Theta) + 2z^T(t+\Theta)\, G(t)\, Q_{wv}(t)\, u(t) + u^T(t)\, Q_v(t)\, u(t)] = I_2(u)$. Вводя обозначения

$$\overline{Q}_\varphi(t) = A_1(t)\, Q_\varphi(t-h_1)\, A_1^T(t),\ \overline{Q}_w(t) = G(t)\, Q_w(t)\, G^T(t),$$
$$\overline{Q}_{wv}(t) = G(t)\, Q_{wv}(t), \qquad (13)$$

окончательно получаем

$$I_2(u) = z^T(t_0)\, Q_0 z(t_0) + \sum_{s=0}^{h_1-\Theta} z^T(t_0+s+\Theta)\, \overline{Q}_\varphi(t_0+s)\, z(t_0+s+\Theta) +$$
$$+ \sum_{t=t_0}^{t_f-\Theta} [z^T(t+\Theta)\, \overline{Q}_w(t)\, z(t+\Theta) + 2z^T(t+\Theta)\, \overline{Q}_{wv}(t)\, u(t) +$$
$$+ u^T(t)\, Q_v(t)\, u(t)]. \qquad (14)$$

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 1. Задача оптимальной фильтрации (1)—(6) эквивалентна задаче оптимального управления системой (7)—(8), на траекториях которой минимизируется функционал (14).

Эквивалентность следует понимать в том смысле, что функционалы I_1 и I_2 достигают оптимумов на одном и том же множестве векторов $u(t),\ t \in T_N^\Theta$.

Производя в (7), (8) замену времени $\tau = t_f - t - \Theta$, $0 \leqslant \tau \leqslant t_f - t_0$, и переходя к новым переменным $\bar{z}(\tau) = z(t_f - \tau)$, $\bar{u}(\tau) = u(t_f - \tau - \Theta)$, $\tau \in \{0, \dots, t_f - t_0\}$, приходим к следующей задаче оптимального управления:

$$\bar{z}(\tau+\Theta) = A^T(t_f-\tau-\Theta)\, \bar{z}(\tau) + A_1^T(t_f-\tau-\Theta+h_1)\, \bar{z}(\tau-h_1) +$$
$$+ C^T(t_f-\tau+\Theta)\, \bar{u}(\tau),\ \bar{z}_0(\cdot) = \{0,\ \tau \in \{-h_1, \dots, -\Theta\},\ \bar{z}(0) = l\}, \quad (15)$$
$$I_2(\bar{u}) = \bar{z}^T(t_f-t_0)\, Q_0 \bar{z}(t_f-t_0) + \sum_{s=-h_1}^{-\Theta} \bar{z}^T(t_f-t_0+s)\, \overline{Q}_\varphi(t_0-s-\Theta) \times$$
$$\times \bar{z}(t_f-t_0+s) + \sum_{\tau=0}^{t_f-t_0-\Theta} [\bar{z}^T(\tau)\, \overline{Q}_w(t_f-\tau-\Theta)\, \bar{z}(\tau) + 2\bar{z}^T(\tau) \times$$
$$\times \overline{Q}_{wv}(t_f-\tau-\Theta)\, \bar{u}(\tau) + \bar{u}^T(\tau)\, Q_v(t_f-\tau-\Theta)\, \bar{u}(\tau)].$$

Теорема 2. Задача оптимальной фильтрации (1)—(6) эквивалентна задаче оптимального управления (15).

2. Запаздывание в наблюдениях. Пусть наблюдаемый сигнал удовлетворяет уравнению

$$y(t) = C(t)\, x(t) + C_1(t)\, x(t-h_2) + v(t),\ t \in T_N^\Theta. \qquad (16)$$

Сопряженная система в этом случае имеет вид:

$$z(t) = A^T(t)\, z(t+\Theta) + A_1^T(t+h_1)\, z(t+h_1+\Theta) + C^T(t)\, u(t) +$$
$$+ C_1^T(t+h_2)\, u(t+h_2),\ t \in T_N^\Theta. \qquad (17)$$

Воспользовавшись предложенной схемой рассуждений, можно доказать следующий результат.

Теорема 3. Задача оптимальной фильтрации (1), (2), (16), (4)—(6) эквивалентна следующей задаче оптимального управления:

$$\bar{z}(\tau+\Theta)=A^T(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau)+A_1^T(t_f-\tau-\Theta+h_1)\bar{z}(\tau-h_1)+$$
$$+C^T(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)+C_1^T(t_f-\tau-\Theta+h_2)\bar{u}(\tau-h_2),$$
$$\tau\in\{0,\ \Theta,\ \ldots,\ t_f-t_0\},$$
$$\bar{z}_0(\cdot)=\{0,\ \tau\in\{-h_1,\ \ldots,\ -\Theta\},\ \bar{z}(0)=l\},\ \bar{u}(\tau)=0,\ \tau\in\{-h_2,\ \ldots,\ 0\},$$
$$I_3(\bar{u})=\bar{z}^T(t_f-t_0)Q_0\bar{z}(t_f-t_0)+\sum_{s=-h_1}^{-\Theta}\bar{z}^T(t_f-t_0+s)\bar{Q}_\varphi(t_0-s-\Theta)\times$$
$$\times\bar{z}(t_f-t_0+s)+\sum_{s=-h_2}^{-\Theta}\bar{u}^T(t_f-t_0+s)Q_{\varphi_1}(t_0-s-\Theta)\bar{u}(t_f-t_0+s)+$$
$$+2\sum_{s=-h}^{-\Theta}\bar{z}^T(t_f-t_0+s)Q_{\varphi_2}(t_0-s-\Theta)\bar{u}(t_f-t_0+s)+$$
$$+\sum_{\tau=0}^{t_f-t_0-\Theta}[\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_w(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau)+2\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_{wv}(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)+$$
$$+\bar{u}^T(\tau)Q_v(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)],$$

где $Q_{\varphi_1}(t)=C_1(t)Q_\varphi(t-h_2)C_1^T(t)$, $Q_{\varphi_2}(t)=A_1(t)Q_\varphi(t-h)C_1^T(t)$, $h=$ $=\min\{h_1,\ h_2\}$.

3. Запаздывание в шумовых помехах. Пусть запаздывание входит не только в фазовые переменные, но и в шумовые помехи, действующие на систему

$$x(t+\Theta)=A(t)x(t)+A_1(t)x(t-h_1)+G(t)w(t)+G_1(t)w(t-h_1),$$
$$w(t)\equiv 0,\ t\leqslant t_0. \tag{18}$$

В этом случае имеет место следующая

Теорема 4. Задача оптимальной фильтрации (18), (2)—(6) эквивалентна задаче оптимального управления системой (15) с функционалом:

$$I_4(\bar{u})=\bar{z}^T(t_f-t_0)Q_0\bar{z}(t_f-t_0)+\sum_{s=-h_1}^{-\Theta}\bar{z}^T(t_f-t_0+s)\bar{Q}_\varphi(t_0-s-\Theta)\times$$
$$\times\bar{z}(t_f-t_0-\Theta)+\sum_{\tau=0}^{t_f-t_0-\Theta}[\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_w(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau)+$$
$$+2\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_{w_1}(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau-h_1)+\bar{z}^T(\tau-h_1)\bar{Q}_{w_2}(t_f-\tau-\Theta)\bar{z}(\tau-h_1)+$$
$$+2\bar{z}^T(\tau)\bar{Q}_{wv}(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)+2\bar{z}^T(\tau-h_1)Q_{wv_1}(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)+$$
$$+\bar{u}^T(\tau)Q_v(t_f-\tau-\Theta)\bar{u}(\tau)],$$

где $\bar{Q}_{w_1}(t)=G(t)Q_w(t)G_1^T(t+h_1)$, $\bar{Q}_{w_2}(t)=G_1(t+h_1)Q_w(t)G_1^T(t+h_1)$, $\bar{Q}_{wv_1}(t)=G_1(t+h_1)Q_{wv}(t)$.

Доказанные теоремы позволяют строить двойственные алгоритмы фильтрации, основанные на получении оптимального управления в сопряженных системах [2] и использовании соотношения (5).

Список литературы

1. Lindquist A. // Journ. Math. Anal. and Appl. 1972. V. 37. № 2. P. 516.
2. Лебедев А. Л. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1986. № 5. С. 116.
3. Забелло Л. Е. Минимизация квадратичных функционалов и проблема второй вариации в управляемых системах с запаздыванием / Редкол. журн. «Вести. Белорус-

ского ун-та. Сер. 1.: Физ. Мат. Мех. Минск, 1983. Деп. в ВИНИТИ 27.01.83. № 505-83.
4. Лебедев А. Л. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1: Физ. Мат. Мех. 1986. № 1. С. 35.

Поступила в редакцию 13.02.87.

УДК 519.6

М. М. КОВАЛЕВ, НГУЕН НГИА

МНОГОГРАННИК МЕДИАН ГРАФА

Целые точки многогранника медиан графа служат допустимой областью дискретного аналога известной задачи Ферма—Вебера: в метрическом пространстве найти местоположение точек, сумма расстояний которых до данных k точек минимальна. Подмечено, что симплекс-метод на многограннике медиан графа почти всегда приводит к целочисленному оптимуму, в связи с чем Спинетто в 1976 г. сформулировал проблему: изучить строение целочисленных вершин многогранника медиан графа. Результаты работ [1—3] по частичному решению проблемы Спинетто обобщены в [4] (см. § 7); в [5] приведен критерий смежности целочисленных вершин. В предлагаемой статье дается полное решение проблемы Спинетто.

Многогранник $M(k, n)$ медиан графа задается условиями:

$$\sum_{j\in N} x_{ij}=1 \quad \forall_i \in N, \sum_{i\in N} x_{ii}=k, \tag{1)—(2}$$

$$x_{ij}\leqslant x_{jj} \quad \forall (i, j)\in N\times N,\ i\neq j, \qquad x_{ij}\geqslant 0 \quad \forall (i, j)\in N\times N, \tag{3)—(4}$$

где $N=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Напомним (см. [4]), что многогранник M называется квазицелочисленным, если всякое ребро многогранника $\operatorname{conv}(M\cap Z^n)$ является ребром многогранника M. Многогранник называется связноцелочисленным, если подграф графа многогранника M, порожденный его целочисленными вершинами, является остовным подграфом графа многогранника $\operatorname{conv}(M\cap Z^n)$.

Перейдем к формулировке основной теоремы о структуре вершин многогранника k-медиан графа.

Теорема. Многогранник $M(k, n)$ k-медиан графа является

i) целочисленным при $k=1, n-1, n$;

ii) квазицелочисленным, но нецелочисленным при $k=2, 3, n-2$;

iii) связноцелочисленным, но не квазицелочисленным при $4\leqslant k\leqslant\leqslant n-3$. Доказательство теоремы основано на ряде лемм.

Лемма 1. Многогранник $M(n)$, заданный условиями (1), (3), (4), является квазицелочисленным.

Доказательство. Введя фиктивные переменные

$$y_{ij}\geqslant 0 \quad \forall (i, j)\in N\times N,\ i\neq j, \tag{5}$$

приведем ограничения (3) к виду:

$$x_{ij}-x_{jj}+y_{ij}=0 \quad \forall (i, j)\in N\times N,\ i\neq j. \tag{3$'$}$$

Система ограничений (1), (3′), (4), (5) определяет в R^{2n^2-n} многогранник, который будем обозначать $M'(n)$. Сложением строк можем преобразовать систему ограничений, задающих многогранник $M'(n)$, к следующей эквивалентной форме: $\sum_{j\in N} x_{ij}=1\ \forall i\in N,\ \ x_{ij}+\sum_{\substack{p\neq j\\ p\in N}} x_{jp}+y_{ij}=1$ $\forall (i, j)\in N\times N,\ i\neq j,\ x_{ij}\geqslant 0\ \forall (i, j)\in N\times N,\ y_{ij}\geqslant 0\ \forall (i, j)\in N\times N,$ $i\neq j$. Последняя по теореме 7.2 из [4] определяет квазицелочисленный многогранник, откуда следует и квазицелочисленность многогранника $M(n)$.

Лемма 2 [1]. Все целочисленные точки многогранника — вершины целочисленных граней $F(\omega)=\{x\in M(k, n): x_{ii}=0\quad \forall i\in N\setminus\omega\}$ для каждого k-подмножества ω множества N.

Лемма 3 [4]. Пусть $\omega', \omega''\subset N$, $|\omega'\cap\omega''|=k-1$, x' и x'' — две целочис-