2. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., 1966.
3. Ведерников С. В. // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. М., 1975. Т. 7. С. 49.
4. Розенфельд Б. А. Неевклидовы пространства. М., 1969.

Поступила в редакцию 03.12.87.

УДК 519.852.35:853.4

Ч. А. ДАНГАЛЧЕВ

СЕТЕВАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФУНКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОПЕРАЦИИ ВЗЯТИЯ МОДУЛЯ

Пусть $S=\{I, V\}$ — конечная ориентированная сеть, в которой I — множество узлов; V — множество дуг $I = I_v \cup I_s \cup I_m$, где I_v — входные узлы размножители; I_s — узлы сумматоры; I_m — узлы взятия модуля.

Узел $i \in I_v$ имеет один вход и конечное число выходов. Входной поток X, поступив на узел i, проходит через него и передается далее в виде X_1, X_2, ... выходных сигналов, представляющих копии входного сигнала.

Узел $i \in I_d = I_s \cup I_m$ имеет конечное число входов и один выход. Входные сигналы X_1, X_2, ..., X_k, поступив на узел $i \in I_d$, проходят через него и передаются далее в виде выходного сигнала $Y = \sum_{j=1}^{k} X_j + a_i$, если $i \in I_s$, или $Y = \left| \sum_{j=1}^{k} X_j + a_j \right|$, если $i \in I_m$, где a_i — характеристика узла $i \in I_d$. Выход Y из узла i будем обозначать через X_{ii}, чтобы отличить от входных сигналов.

Для дуги $(i, j) \in V$, $i, j \in I$, кроме традиционных характеристик d_*, d^* — нижней и верхней пропускных способностей, введем новую — $A_{ij} \neq 0$, отражающую специальное свойство дуги (i, j) передавать поток X_i в узел j в виде $A_{ij} X_i$. Дугам $(i, j) \in V$, где $i \in I_v$, $j \in I_s$, не приписываются характеристики d_*, d^*. Если $i \in I_m$, то $d_{*ij} \geqslant 0$.

Сеть S имеет один выходной узел t, принадлежащий множеству I_s. Если для дуги (i, j) и $i \in I_v$, то $j \in I_s$, и если $j \in I_s \setminus t$, то $i \in I_v$.

Определение 1. Входные сигналы X_i, $i \in I_v$, называются планом, если потоки на сети S удовлетворяют ограничениям:

$$d_{*i} \leqslant X_i \leqslant d_i^*, \quad i \in I_v, \tag{1}$$

$$d_{*ij} \leqslant X_{ii} \leqslant d_{ij}^*, \quad i \in I_d \setminus t. \tag{2}$$

Граф, образованный из узлов $i \in I_d$ и соответствующих им дуг, является деревом. Рассмотрим задачу:

$$X_t \to \min \tag{3}$$

при ограничениях (1) и (2).

Пусть X — допустимый поток, т. е. план. Для каждого узла $i \in I_d$ определим E_i следующим способом: $E_t = 1$; $E_i = 1$, если $E_i = \operatorname{sign}(\Sigma X_j + a_i)$, если $i \in I_m$, где суммируем по всем входным сигналам в узле i (если сумма равняется нулю, то выбираем произвольный знак).

Решаем систему:

$$M_t = 1; \quad M_i = A_{ij} E_j M_j, \tag{4}$$

где $(i, j) \in V$, $i \in I_d \setminus t$.

Система имеет единственное решение, так как граф является деревом. Совокупность всех узлов $j \in I$, для которых существует путь, связывающий узел $s \in I_v$ с узлом $i \in I_d$ и проходящий через j, обозначим через C_{si}. Определяем также множества $K_{si} = C_{si} \cap I_s$ и $K_s = \bigcup_{s \in I_v} C_{si}$. Возьмем произвольное подмножество J_0 множества I_d.

Рассмотрим матрицу $G = (g_{is}, i \in J_0, s \in I_v)$, где $g_{is} = \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k$.

Пусть I_{v0} — произвольное подмножество I_v.

Определение 2. Совокупность $T=\{J_0, I_{v0}\}$ называется опорой, если $|I_{v0}|=|J_0|$ и $\det G_0 \neq 0$, где $G_0 = G(J_0, I_{v0})$. Совокупность $\{X, T\}$ будем называть опорным планом.

Определение 3. Опорный план $\{X, T\}$ является невырожденным, если на нем выполняются неравенства: $d_{*i} < X_{ii} < d_i^*$, $i \in I_{v0}$, и $d_{*ij} < X_{ii} < d_{ij}^*$, $(i, j) \in V$, $i \in J_{н} = I_l \setminus J_0$.

Для каждого $i \in J_0$ выполняется:

$$M_i X_{ii} = \sum_{s \in I_v} X_s \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k + \sum_{j \in K_i} E_j M_j a_j. \tag{5}$$

Рассмотрим поток $\overline{X} = X + \Delta X$. Аналогично (5) получаем:

$$M_i \overline{X}_{ii} = \sum_{s \in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} \overline{M}_k + \sum_{j \in K_i} \overline{E}_j \overline{M}_j a_j, \; i \in J_0. \tag{6}$$

Полагая $M_k^* = \overline{M}_k \operatorname{sign}(\overline{M}_i M_i)$ и умножая (6) на $\operatorname{sign}(\overline{M}_i M_i)$, получаем:

$$M_i \overline{X}_{ii} = \sum_{s \in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k^* + \sum_{j \in K_i} E_j M_j^* a_j. \tag{7}$$

Вычитая почленно (5) из (7), получаем:

$$M_i \Delta X_{ii} = \sum_{s \in I_v} \Delta X_s \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k + B_i \tag{8}$$

для каждого $i \in J_0$, где $B_i = \sum_{j \in K_i} a_j (M_j^* E_j - M_j E_j) + \sum_{s \in I_v} X_s + \Delta X_j \times \times \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} (M_k^* - M_k)$. Если $i \in I_{s0} = I_s \cap J_0$, то $B_i = 0$.

Рассмотрим вектор $C' = (C_s, s \in I_v)$, где $C_s = \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} M_k$. При помощи вектора C введем потенциалы $Y' = (Y_i, i \in J_0)$:

$$Y' = C'(I_{v0}) G_0^{-1} = C_0' G_0^{-1} \text{ и } J_i = 0, \text{ если } i \in J_{н}. \tag{9}$$

Отсюда получаем $J' G_0 = C_0'$ или

$$\sum_{k \in K_{st}} A_{st} M_k = \sum_{i \in J_0} Y_i \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k, \; s \in I_{v0}. \tag{10}$$

Для каждого $i \in J_0$ рассмотрим $\delta_i = Y_i M_i$, для каждого $K \in I_s \cup J_0$ рассмотрим $\mu_k = M_k \left(1 - \sum_{i \in C_{kt}} Y_i\right)$ и для каждого $s \in I_{vн} = I_v \setminus I_{v0}$ рассмотрим $D_s = \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} \mu_k$.

Приступим к вычислению формулы приращения:

$$F = X_t = \sum_{s \in I_v} C_s X_s + \sum_{j \in I_d} a_j M_j E_j.$$

$$\overline{F} = \sum_{s \in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} \overline{M}_k + \sum_{j \in I_d} a_j \overline{M}_j \overline{E}_j,$$

$$\Delta F = \sum_{s \in I_v} \Delta X_s \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} M_k + B, \text{ где}$$

$$B = \sum_{j \in I_d} a_j (\overline{M}_j \overline{E}_j - M_j E_j) + \sum_{s \in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k \in K_{st}} A_{sk} (\overline{M}_k - M_k). \tag{11}$$

Учитывая (10), получаем:

$$\sum_{s\in I_{v0}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{st}} A_{sk}M_k = \sum_{s\in I_{v0}} \Delta X_s \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k =$$

$$= \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k - \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k =$$

$$= \sum_{i\in J_0} Y_i (M_i\Delta X_{ii} - B_i) - \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k.$$

Вернемся к вычислению ΔF:

$$\Delta F = B + \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k + \sum_{i\in J_0} Y_i M_i \Delta X_{ii} - \sum_{i\in J_0} Y_i B_i -$$

$$- \sum_{i\in J_0} Y_i \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk}M_k = \sum_{i\in J_0} \delta_i \Delta X_{ii} + \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s \sum_{k\in K_{st}} A_{sk}M_k \times$$

$$\times \Big(1 - \sum_{i\in C_{kt}} Y_i\Big) + B - \sum_{i\in J_0} Y_i B_i.$$

В итоге получаем:

$$\Delta F = \sum_{i\in J_0} \delta_i \Delta X_{ii} + \sum_{s\in I_{v\text{н}}} \Delta X_s D_s + B - \sum_{i\in J_0} J_i B_i. \tag{12}$$

Выясним физический смысл компонентов векторов δ и D, предполагая, что план $\{X, T\}$ невырожденный.

А. Пусть $\Delta X_s \neq 0$, $s \in I_{v\text{н}}$; $\Delta X_j = 0$, $j \in I_{v\text{н}} \setminus i$; $\Delta X_{ii} = 0$, $i \in J_0$. При достаточно малом $|\Delta X_s|$ получаем $M_j^* = M_j$, $\overline{M}_j = M_j$ и, следовательно, $B_j = 0$, $B = 0$ и $\Delta F = D_s \Delta X_s$, т. е. D_s является первоначальной скоростью изменения целевой функции.

Б. Пусть $\Delta X_{ii} \neq 0$, $i \in J_0$: $\Delta X_{jj} = 0$, $j \in J_0 \setminus i$; $\Delta X_s = 0$, $s \in I_{v\text{н}}$.

1. Если $i \in I_{s0}$, то $\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii}$.

2. Если $X_{ii} \neq 0$ и $i \in I_{m0}$, то $\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii}$, где $I_{m0} = I_m \cap J_0$.

3. Если $X_{ii} = 0$ и $\overline{E}_i = E_i$, то опять $\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii}$, $i \in I_{m0}$.

4. Пусть $X_{ii} = 0$ и $\overline{E}_i = -E_i$. Тогда $\overline{M}_i = M_i$ и $\overline{M}_k = -M_k$, если $k \in K_i \setminus i$.

Все остальные члены сохраняют знаки. Вычислим B:

$$B = \sum_{j\in I_d} a_j (\overline{M}_j \overline{E}_j - M_j E_j) + \sum_{s\in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k\in K_{st}} A_{sk} (\overline{M}_k - M_k) =$$

$$= \sum_{j\in K_i} a_j (-2M_j E_j) + \sum_{s\in I_v} (X_s + \Delta X_s) \sum_{k\in K_{si}} A_{sk} (-2M_k).$$

Так как $-2\Big(\sum_{j\in K_i} a_j M_j E_j + \sum_{s\in I_v} X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk} M_k\Big) = -2M_i X_{ii} = 0$, то получаем:

$$B = -2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk} M_k. \tag{13}$$

Теперь рассмотрим $B_p : M_k^* = -M_k$, если $i \in C_{kt}$ и, следовательно, $B_p \neq 0$ при $p \in C_{it}$, т. е. имеем: $B_p = -2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk} M_k$. $\Delta F =$

$$= \delta_i \Delta X_{ii} - 2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk} M_k - \sum_{p\in C_{it}} J_p \Big(-2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk} M_k\Big) =$$

$$= \delta_i \Delta X_{ii} - 2 \sum_{s\in I_v} \Delta X_s \sum_{k\in K_{si}} A_{sk} M_k \Big(1 - \sum_{p\in C_{it}} J_p\Big).$$

Применяя (8), получаем:

$$M_i \Delta X_{ii} = \sum_{s \in I_v} \Delta X_s \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k + B_i = \sum_{i \in I_v} \Delta X_s \sum_{k \in K_{si}} A_{sk} M_k.$$

$$\Delta F = \delta_i \Delta X_{ii} + 2 M_i \Delta X_{ii} \Big(1 - \sum_{p \in C_{it}} Y_p\Big).$$

В итоге получаем:

$$\Delta F = (\delta_i + 2\mu_i) \Delta X_{ii}. \tag{14}$$

Теперь можем сформулировать критерий локальной оптимальности.

Теорема 1. Для локальной оптимальности опорного плана $\{X, T\}$ достаточна, а в случае невырожденности и необходима, выполнимость соотношений:

$$\begin{gathered} D_s \geqslant 0, \text{ если } X_s = d_{*s}, \\ D_s \leqslant 0, \text{ если } X_s = d_s^*, \end{gathered} \tag{15}$$

$$D_s = 0, \text{ если } d_{*s} < X_s < d_s^*, \ s \in I_{v\text{н}}.$$

$$\begin{gathered} \delta_i \geqslant 0, \text{ если } X_{ii} = d_{*ij}, \\ \delta_i \leqslant 0, \text{ если } X_{ii} = d_{ij}^*, \\ \delta_i = 0, \text{ если } d_{*ij} < X_{ii} < d_{ij}^*, \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} (i, j) \in V, \ i \in I_{s0} \text{ или } i \in I_{m0} \text{ и } X_{ii} \neq 0. \\ \delta_i \geqslant 0 \text{ и } \delta_i + 2\mu_i \geqslant 0, \text{ если } i \in I_{m0} \text{ и } X_{ii} = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Определение 4. План $\{X, T\}$ называется согласованным, если на нем выполняются соотношения (16) и (17).

Введем β:

$$\beta = \sum_{D_s > 0} D_s (X_s - d_{*s}) + \sum_{D_s < 0} D_s (X_s - d_s^*), \tag{18}$$

где $s \in I_{v\text{н}}$.

Теперь можем сформулировать критерий субоптимальности.

Теорема 2. Для локальной субоптимальности невырожденного согласованного плана достаточна выполнимость неравенства $\beta \leqslant \varepsilon$.

На базе доказанных утверждений, следуя (1), можно построить прямой опорный метод решения задачи (3) (Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, О. И. Костюкова. Конструктивные методы оптимизации. Минск, 1986. Ч. 3: Сетевые задачи. С. 26).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Р. Ф. Габасову за внимание к работе.

Поступила в редакцию 03.12.86.

УДК 517.977

А. Л. ЛЕБЕДЕВ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ И ФИЛЬТРАЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Одним из центральных результатов теории оптимального управления является доказанный Р. Калманом принцип двойственности, который устанавливает тесную внутреннюю связь задач оптимального управления по квадратичному критерию и задач оптимальной фильтрации, а также позволяет облегчить решение многих практических задач управления. Впервые результаты Р. Калмана были перенесены на дифференциальные системы с запаздывающим аргументом А. Линдквистом [1]. Предлагаемая работа посвящена изучению дискретных систем, на примере которых доказана двойственность задач минимизации обобщенных квадратичных