УДК 517.9

А. А. САМОДУРОВ

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим встречающееся в приложениях дифференциальное уравнение [1]

$$\frac{d^2y}{dx^2}+f(x)\frac{dy}{dx}+\Phi(y)+F(x)=0, \tag{1}$$

где $f(x)$, $F(x)$, $\Phi(y)$ — вещественные голоморфные в окрестности точки $(0, 0)$ функции, $\Phi(y)\not\equiv y$, $\Phi(y)\not\equiv\mathrm{const}$ *.

Групповой анализ этого уравнения при $\Phi(y)\equiv K\exp y$ ($K=\mathrm{const}\neq 0$) проведен в работах [2, 3]. Ниже будет показано, что такая специализация функции $\Phi(y)$ является (с точностью до линейной замены неизвестной функции) необходимой для инвариантности уравнения (1) относительно однопараметрической группы преобразований.

Пусть $\underset{2}{X}=\xi(x, y)d/dx+\eta(x, y)d/dy+\zeta_1(x, y, y')d/dy'+\zeta_{11}(x, y, y', y'')\partial/\partial y''$ — инфинитизимальный оператор [4]. Тогда определяющее уравнение для выражения (1) имеет вид

$$(f'y'+F')\xi+f\zeta_1+\Phi'\eta+\zeta_{11}\Big|_{y''=-\left(f\frac{dy}{dx}+\Phi+F\right)}=0, \tag{2}$$

где штрих обозначает производную.

Подставляя в (2) вместо ζ_1, ζ_{11} соответствующие выражения (см., например, [3]), имеем: $(f'y'+F')\xi+\Phi'\eta+f(\eta_x+y'\eta_y-y'\xi_x-y'^2\xi_y)+\eta_{xx}+y'\eta_{xy}-y'\xi_{xx}-y'^2\xi_{xy}+y'(\eta_{xy}+y'\eta_{yy}-y'\xi_{xy}-y'^2\xi_{yy})-(fy'+\Phi+F)(\eta_y-2\xi_x-3y'\xi_y)=0$. Сравнивая в последнем соотношении коэффициенты при одинаковых степенях производной y', приходим к системе уравнений:

$$\begin{gathered}\xi_{yy}=0,\\ -f\xi_y-2\xi_{xy}+\eta_{yy}+3f\xi_y=0,\\ f'\xi+2\eta_{xy}-\xi_{xx}+f\xi_x+3\Phi\xi_y+3F\xi_y=0,\\ F'\xi+\Phi'\eta+f\eta_x+\eta_{xx}-F(\eta_y-2\xi_x)-\Phi(\eta_y-2\xi_x)=0.\end{gathered} \tag{3}$$

Из первых двух уравнений системы (3) получаем, что

$$\xi=B_1(x),\quad \eta=B_2(x)y+C_2(x), \tag{4}$$

где функции $B_1(x)$, $B_2(x)$ и $C_2(x)$ определяются из последующих уравнений системы. Подставляя (4) в оставшиеся уравнения системы (3) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, имеем:

$$\begin{gathered}f'B_1+2B_2'-2B_1''+fB_1'=0,\\ F'B_1+\Phi'(B_2y+C_2)+f(B_2'y+C_2')+B_2''y+C_2''-F(B_2y-\\ -2B_1')-\Phi(B_2-2B_1')=0.\end{gathered}$$

Полученная система при сделанных ранее предположениях относительно $\Phi(y)$ равносильна системе

$$\begin{gathered}f'B_1+2B_2'-2B_1''+fB_1'=0,\\ F'B_1+fC_2'+C_2''-FB_2+2FB_1'=0,\\ \Phi'(B_2y+C_2)+fB_2'y+B_2''y-\Phi(B_2-2B_1')=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Последнее соотношение системы выполнено лишь при $B_2\equiv 0$. При этом условии получаем последовательно

---

* Линейное уравнение изучено в классических работах С. Ли (см. [4]).

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = -\frac{2B_1'}{C_2} \equiv \frac{1}{\mu}, \quad \Phi(y) = K \exp(y/\mu), \qquad (6)-(7)$$

где K и μ — произвольные постоянные.

Из соотношения (6) следует $C_2 = -2\mu B_1'$, и далее два первых уравнения системы (5) перепишутся в виде

$$B_1'' = f'B_1 + fB_1', \quad F'B_1 - 2\mu f B_1'' - 2\mu B_1''' + 2FB_1 = 0. \qquad (8)$$

Из соотношений (8) получаем, что система (3) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$3u'^2 - 2uu'' - 4f'u^2 + 2fuu' = 0, \qquad (9)$$

где $u = F - 2\mu f^2 - 2\mu f'$.

Если $u \neq 0$, то из соотношения (9) следует, что функция $v = -\frac{1}{2}\frac{d\ln u}{dx}$ удовлетворяет уравнению Риккати $v' - fv = -v^2 + f'$, т. е. $v = f + ((\exp(\int f(x)dx))(C + \exp(-\int f(x)dx)))^{-1}$, где C — произвольная постоянная.

Из приведенных рассуждений следует

Теорема. Для того чтобы нелинейное уравнение (1) допускало непрерывную по параметру a группу преобразований

$$x^* = g(x, y, a), \quad y^* = h(x, y, a) \qquad (10)$$

необходимо, чтобы функция $\Phi(y)$ имела вид (7). Если это условие выполнено, то уравнение (1) допускает группу (10) тогда и только тогда, когда выполняется тождество (9).

Преобразования (10) находятся как решения соответствующей задачи Коши. Подробнее см. [5]; там же указаны уравнения вида (1), допускающие непрерывную группу, общее решение которых можно построить по одному известному частному решению.

Пример. Уравнение $y'' + \alpha y' + K\exp(y/\mu) + 2\mu\alpha^2 = 0$ допускает группу $x^* = -\frac{1}{\alpha}\ln|c_1 + \exp(-\alpha(x + c_2))|$, $y^* = y + 2\mu\alpha(x + c_2) + 2\ln|c_1 + \exp(-\alpha(x + c_2))|$, где c_1 и c_2 — параметры.

Общее решение рассматриваемого уравнения имеет вид $y = -2\alpha\mu(x + c_2) - 2\ln|c_1 + \exp(-\alpha(x + c_2))| + y_1(-\frac{1}{\alpha}\ln|c_1 + \exp(-\alpha(x + c_2))|$, где $y_1(x)$ — его частное решение.

Список литературы

1. Чудновский В. М., Холодкевич Е. Д. // ФТТ. 1982. Т. 24. № 4. С. 1118.
2. Самодуров А. А. // Численные методы решения краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений. М., 1986. С. 14.
3. Самодуров А. А., Чудновский В. М. // Диф. уравнения. 1987. Т. 23. № 5. С. 911.
4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М., 1980.
5. Горбузов В. Н., Самодуров А. А. Уравнения Риккати и Абеля. Гродно, 1986.

Поступила в редакцию 12.02.87.